

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA E TELECOMUNICAZIONI

DOTTORATO DI RICERCA IN

RF, MICROONDE ED ELETTROMAGNETISMO

CICLO XIX

**DOSIMETRIA NUMERICA
IN CONDIZIONI QUASI-STATICHE
E PROBLEMI COLLEGATI**

Dottorando:

Ing. Nicola Zopetti

Coordinatore del collegio dei docenti:

Prof. Gianfranco Manes

Tutori:

Prof. Giuseppe Pelosi

Dott. Daniele Andreuccetti (IFAC-CNR)

settore disciplinare **ING-INF/02 CAMPI ELETTROMAGNETICI**

SOMMARIO

1	INQUADRAMENTO DEL PROBLEMA	3
1.1	LA NORMATIVA INTERNAZIONALE E NAZIONALE	4
1.2	LA DOSIMETRIA DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI	6
1.3	GRANDEZZE DOSIMETRICHE FONDAMENTALI.....	7
1.4	LA DOSIMETRIA NUMERICA.....	8
1.5	L'APPROSSIMAZIONE QUASI-STATICA.....	10
1.6	PRECEDENTI ESPERIENZE IN DOSIMETRIA DEL GRUPPO DI RICERCA	10
1.7	CONTENUTI DELLA TESI DI DOTTORATO	12
2	RAPPRESENTAZIONE DIGITALE DELL'ORGANISMO UMANO	14
2.1	IL MODELLO DI ORGANISMO DI RIFERIMENTO.....	15
2.2	CALCOLO DELLE PROPRIETÀ DIELETTRICHE DEI TESSUTI.....	18
2.3	SVILUPPO DI UN ALGORITMO DI ARTICOLAZIONE DEL MODELLO DI ORGANISMO.....	21
2.4	SVILUPPO DI UNA APPLICAZIONE PER LA VISUALIZZAZIONE 3D.....	32
3	METODI DI CALCOLO	34
3.1	L'APPROSSIMAZIONE QUASI-STATICA.....	35
3.2	METODI PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ELETTRICO ESTERNO.....	38
3.3	METODI PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA INTERNO	40
3.4	LA DISCRETIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI.....	45
4	IMPLEMENTAZIONE DEI PROGRAMMI DI CALCOLO	59
4.1	TECNICHE DI SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI	60
4.2	SCELTA DELLA TECNICA DI SOLUZIONE PER IL PROBLEMA INTERNO	63
4.3	SCELTA DELLA TECNICA DI SOLUZIONE PER IL PROBLEMA ESTERNO.....	67

5	VALIDAZIONE DEI PROGRAMMI DI CALCOLO	75
5.1	CONFRONTO CON MODELLI ANALITICI.....	76
5.2	CONFRONTO CON MISURE	84
6	CASI STUDIO E DIRETTIVA 2004/40/CE	86
6.1	ESPOSIZIONE AL CAMPO MAGNETICO GENERATO DA FORNI AD INDUZIONE.....	87
6.2	ESPOSIZIONE AL CAMPO ELETTRICO E MAGNETICO GENERATI DA UNA LINEA ELETTRICA	93
	CONCLUSIONI.....	100
	BIBLIOGRAFIA	101
	APPENDICI.....	104

1 INQUADRAMENTO DEL PROBLEMA

In questo capitolo introduttivo, per prima cosa si definirà il contesto normativo di riferimento. Ciò è necessario per comprendere il senso del lavoro svolto: sin dal progetto del Dottorato si è infatti mirato a dare risposte a domande poste dalla normativa e creare degli strumenti che potessero essere di ausilio agli enti che saranno chiamati a controllare il rispetto dei limiti.

In seguito si definiranno i concetti e le grandezze fondamentali che ricorreranno nel seguito della tesi, con particolare riferimento alle diverse fasi che caratterizzano lo svolgimento di un'analisi dosimetrica mediante strumenti e tecniche numeriche. Si farà poi una breve panoramica delle precedenti esperienze del gruppo di ricerca, relativamente alla dosimetria, che hanno costituito la base dalla quale si è partiti per l'esecuzione dello studio svolto durante il Dottorato. Infine si presentano sinteticamente i contenuti della tesi.

1.1 LA NORMATIVA INTERNAZIONALE E NAZIONALE

La tesi di dottorato trae origine e spunto dall'emanazione della direttiva 2004/40/EC [1]. Tale direttiva, salvo interventi del Consiglio e del Parlamento Europeo, dovrà essere recepita dagli stati membri, e quindi anche dall'Italia, entro il 30 Aprile 2008. Il recepimento della direttiva riempirà l'attuale vuoto normativo che riguarda l'esposizione dei lavoratori ai campi elettromagnetici; in Italia infatti, con la legge n.36 del 2001 ed i successivi decreti del 2003, si introducono limiti solo per la popolazione.

Ma cosa dice la direttiva? Ed in che modo la direttiva ha a che vedere con la dosimetria numerica? Nel seguito si fornirà un quadro delle prescrizioni previste dalla direttiva e delle implicazioni che ne conseguono, con particolare attenzione al caso delle basse frequenze.

La direttiva fa suo l'approccio delle linee guida ICNIRP [2]; queste ultime stabiliscono limiti in termini di grandezze di base, detti *limiti di base* nelle ICNIRP e *valori limite di esposizione* nella Direttiva. Alle basse frequenze si fa riferimento a valori limite di esposizione espressi in termini di densità di corrente indotta. Tali limiti si riferiscono alla prevenzione da effetti acuti dimostrati dalla comunità scientifica. In particolare si stabilisce, in base alla letteratura disponibile, quale è la soglia di tali effetti e si definiscono i limiti di esposizione applicando dei margini di sicurezza, diversi per i lavoratori e la popolazione. Si stabilisce infatti che per i lavoratori si possa arrivare più vicini alla soglia degli effetti biologici in virtù del controllo delle esposizioni e di quello medico che devono essere necessariamente predisposti nei luoghi di lavoro.

La direttiva e le linee guida ICNIRP stabiliscono anche dei limiti in termine di grandezze direttamente misurabili, ed in particolare, alle basse frequenze, campo elettrico e magnetico. Per sviluppare tali limiti, detti *di riferimento* nelle ICNIRP e *valori di azione* nella Direttiva, si applicano dei modelli dosimetrici analitici fortemente semplificati, che permettono di calcolare a quale valore di campo corrisponde il valore limite di esposizione, alla frequenza considerata; ad esempio, per il campo magnetico a bassa frequenza si utilizza il modello della spira circolare.

A questi modelli dosimetrici semplificati, e qui sta il punto, si applicano però dei coefficienti cautelativi abbastanza ampi in modo da assicurare che – in qualunque situazione di esposizione – *il rispetto dei valori di azione garantisca il rispetto dei valori limite di esposizione*.

Il possibile utilizzo dei modelli dosimetrici accurati, come quelli presentati in questa Tesi, è giustificato proprio a causa di tali ampi coefficienti cautelativi.

Cosa fare, infatti, in caso di superamento dei valori di azione? Il testo della Direttiva prevede letteralmente (Art.4 comma 2) che “...una volta che siano superati i valori di azione di cui all'articolo 3, il datore di lavoro valuta e, se del caso, calcola se i valori limite di esposizione sono stati superati”.

Occorre però intendersi su come interpretare quel “valuta”. Nell'ambito del gruppo di ricerca abbiamo maturato la convinzione che esso comprende due aspetti:

- dal punto di vista economico, occorre valutare se convenga investire nella verifica del rispetto dei valori limite di esposizione o se invece sia preferibile procedere immediatamente alla riduzione dei livelli di campo, per ricondurli al di sotto dei valori di azione (come è implicitamente consentito dal comma 2 dell'art.5);
- dal punto di vista tecnico-scientifico, occorre valutare se – nell'effettiva situazione di esposizione con cui si ha a che fare – è ragionevole ipotizzare il rispetto dei valori limite di esposizione, non ostante il superamento dei valori di azione.

“Se del caso”, ovvero se entrambe queste valutazioni danno esito positivo, allora ha senso passare al “calcola”, che evidentemente non può che avvenire sulla base di una rappresentazione della situazione espositiva che sia la più realistica ed accurata possibile in tutti i suoi aspetti (sorgenti, teatro, soggetto esposto).

Limiti di esposizione e valori di azione

Per frequenze inferiori ai 100 kHz le linee guida ICNIRP stabiliscono dei limiti di esposizione in termini di sola densità di corrente. Per frequenze superiori a 100 kHz ma al di sotto dei 10 MHz sono definiti limiti di esposizione sia in termini di densità di corrente sia in termini di SAR. Al di sopra dei 10 MHz invece solamente in termini di SAR. Nelle tabelle seguenti sono riportati i valori limite di esposizione per la densità di corrente ed i valori di azione per il campo elettrico e l'induzione magnetica tra 1 Hz e 10 MHz, per quanto riguarda le esposizioni professionali.

Intervallo di frequenza	Densità di corrente nella testa e nel tronco (*) [mA/m²]
1-4 Hz	40/f
4 Hz-1 kHz	100
1 kHz-10 MHz	f/100
(*) f è la frequenza in hertz	

Tabella 1: valori limite di esposizione per i lavoratori tra 1Hz e 10 MHz

Intervallo di frequenza	E (*) [V/m]	B (*) [μT]
1-8 Hz	20000	2×10^5
8-25 Hz	20000	$2 \times 10^5 / f^2$
0,025-0,82 kHz	$500/f$	$2,5 \times 10^4 / f$
0,82-65 kHz	610	$25/f$
0,065-1 MHz	610	30,7
1-10 MHz	$610/f$	$2/f$
(*) f è la frequenza espressa nell'unità di misura indicata nella prima colonna		

Tabella 2: valori di azione per i lavoratori tra 1Hz e 10 MHz

1.2 LA DOSIMETRIA DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI

La dosimetria elettromagnetica è una disciplina tecnico-scientifica che si occupa di studiare i meccanismi di *accoppiamento* tra un campo elettromagnetico ed un oggetto biologico in esso immerso o, come si dice, “esposto” ad esso.

L'accoppiamento è il primo passo della serie di fenomeni biofisici che costituiscono l'interazione tra un campo elettromagnetico ed un oggetto biologico. Quest'ultima, nel suo complesso, si articola infatti nei passi seguenti.

1. **Esposizione:** un oggetto biologico viene immerso in un campo elettromagnetico.
2. **Accoppiamento:** il campo elettromagnetico induce alcuni fenomeni fisici, caratterizzati da determinate grandezze fisiche, nei tessuti dell'organismo esposto; questi fenomeni hanno origine dalla interazione fisica tra le forze del campo e le cariche e le correnti elettriche presenti nei tessuti.
3. **Effetto biologico:** i fenomeni fisici indotti dal campo esterno provocano sempre una deviazione dalle condizioni di equilibrio elettrico a livello molecolare; per poter parlare propriamente di effetto biologico, si deve però verificare una variazione morfologica o funzionale in strutture di livello superiore (tessuti, organi, sistemi).
4. **Danno biologico o sanitario:** un effetto biologico non costituisce necessariamente un danno; perché questo si verifichi, occorre che l'effetto superi la capacità di compensazione di cui dispone l'organismo, che dipende anche dalle condizioni ambientali.

In questa catena di eventi, la dosimetria si colloca, come si è detto, al punto 2). Essa mira a determinare le leggi fisiche che stabiliscono il rapporto tra l'intensità del campo esterno ed il

valore delle grandezze fisiche, che nel seguito definiremo “grandezze dosimetriche”, indotte nei tessuti.

Sebbene l'intero processo di interazione tra campo elettromagnetico ed organismo biologico sia complessivamente multidisciplinare (poiché coinvolge fisica, biologia e medicina), tuttavia l'accoppiamento propriamente detto e la dosimetria che ne studia quantitativamente le modalità, sono discipline propriamente fisiche.

1.3 GRANDEZZE DOSIMETRICHE FONDAMENTALI

La comunità scientifica che si occupa di interazione tra campi elettromagnetici e sistemi biologici e i più autorevoli enti normativi internazionali concordano in genere nel riconoscere che gli effetti biologici dei campi elettromagnetici sono determinati da alcune grandezze fisiche fondamentali o, quanto meno, che queste grandezze sono le più adatte a correlare l'intensità dell'esposizione con l'entità degli effetti osservati e quindi a descrivere quantitativamente questi ultimi. Noi chiameremo “grandezze dosimetriche fondamentali” queste grandezze, per le quali si trova spesso usato anche il termine “grandezze primarie” o “grandezze di base”. Nelle linee guida ICNIRP, i valori limite (ovvero i valori massimi che le grandezze primarie non devono superare nei tessuti degli organismi esposti) vengono chiamati “limiti di base” (“basic restrictions” in inglese), mentre invece la recente Direttiva Europea sulle esposizioni professionali utilizza per essi il termine “valori limite di esposizione” (“exposure limit values”). Per frequenze fino ad alcune centinaia di chilohertz, la grandezza dosimetrica fondamentale è la densità di corrente J [A/m^2] indotta dai campi nei tessuti nell'organismo esposto, mentre a frequenze maggiori è più opportuno fare riferimento al rateo di assorbimento specifico SAR [W/kg], dato dalla potenza elettromagnetica dissipata nei tessuti per unità di massa. Le due grandezze sono ovviamente correlate, poiché risulta:

$$SAR = \frac{J^2}{\sigma \delta} \quad (1.1)$$

dove σ [A/Vm] e δ [kg/m^3] sono rispettivamente la conducibilità elettrica e la densità del materiale biologico interessato.

La dosimetria elettromagnetica si pone l'obiettivo di determinare quantitativamente l'entità delle grandezze dosimetriche fondamentali, quando siano note sia la distribuzione di campo elettromagnetico impresso in cui l'organismo biologico è immerso, sia le condizioni in cui avviene l'esposizione. Queste ultime comprendono le caratteristiche morfologiche ed elettromagnetiche dell'organismo esposto, la sua postura, nonché la struttura geometrica e le caratteristiche elettromagnetiche di tutti gli oggetti presenti nel cosiddetto teatro espositivo, cioè nell'ambiente in

cui avviene l'esposizione. Per raggiungere lo scopo, la dosimetria elettromagnetica si può avvalere di tecniche sperimentali, analitiche e numeriche. La *dosimetria sperimentale* si avvale di metodi basati su strumentazione e misure, la *dosimetria analitica* si basa sulla soluzione diretta delle equazioni di accoppiamento, mentre infine la *dosimetria numerica* utilizza metodi di risoluzione numerica basati sull'impiego di elaboratori elettronici.

1.4 LA DOSIMETRIA NUMERICA

La dosimetria numerica si avvale di tecniche di tipo computazionale per perseguire la soluzione delle equazioni di accoppiamento attraverso l'uso di un elaboratore elettronico digitale. A questo fine, si deve rinunciare alla generalità della formulazione analitica ed analizzare problemi specifici e particolari. In compenso, la sempre maggiore velocità di elaborazione e disponibilità di memoria degli elaboratori moderni permette di modellare situazioni complesse e quindi affrontare anche problemi di un certo realismo. Le applicazioni della dosimetria numerica si articolano secondo una serie di fasi successive, brevemente descritte nel seguito.

1.4.1 Segmentazione

La **segmentazione** è il processo con cui si costruisce un modello matematico dell'organismo esposto, per esempio di un organismo umano. Si tratta in pratica di sostituire all'organismo stesso un insieme di solidi geometrici di forma sufficientemente regolare, genericamente denominati "segmenti". Nei casi più grossolani, i segmenti sono sfere o cilindri di dimensioni macroscopiche, con cui si modellano direttamente parti del corpo come la testa, il tronco, gli arti. Nei casi più raffinati, si suddivide l'organismo in un grande numero di cubetti elementari (detti *voxel*) di piccole dimensioni [3]. Ovviamente, minori sono le dimensioni dei *voxel*, maggiore è la risoluzione ottenuta ma, d'altro canto, maggiori sono le esigenze di memoria e di tempo di calcolo necessarie per portare a compimento la valutazione. Sono tipici valori di spigolo dell'ordine di pochi millimetri.

1.4.2 Caratteristiche dielettriche dei tessuti

Il passo successivo consiste nell'assegnare a ciascun segmento, considerato omogeneo, una coppia di valori per le cosiddette **proprietà dielettriche**, ovvero per la conducibilità elettrica e per la costante dielettrica (o permittività) relativa, tenendo ovviamente conto della frequenza a cui si desidera svolgere l'indagine.

Nel caso dei *voxel* microscopici, si passa attraverso il riconoscimento del tipo di tessuto di cui ciascun *voxel* è costituito, stabilito in genere in base all'organo di appartenenza. Nel caso invece

dei segmenti macroscopici, si procede cercando di determinare un tessuto prevalente in ogni segmento, oppure si esegue una media ponderata delle proprietà dielettriche dei vari tessuti presenti in esso. In entrambi i casi, occorre risalire dai tipi di tessuto alle rispettive proprietà dielettriche. A questo proposito, il lavoro a tutt'oggi più ampio è quello compiuto nella metà degli anni '90 dal gruppo di C.Gabriel [4],[5],[6],[7], che portò a sviluppare un modello parametrico in grado di rappresentare le proprietà dielettriche dei tessuti biologici nell'intervallo di frequenza da 10 Hz a 100 GHz e permise anche di determinare il valore dei 14 parametri del modello per 45 diversi tessuti umani. Per l'utilizzo di questo modello sono state sviluppate anche applicazioni *on-line* presso i siti Web dell'FCC USA [8] e dell'IFAC-CNR [9].

Un approccio diverso è quello che permette di costruire la mappa 3D di conducibilità e di permittività di un organismo senza passare per la segmentazione ed il riconoscimento del tipo di tessuto, bensì in modo più diretto ed automatico, per esempio dall'elaborazione delle immagini ottenute dalla risonanza magnetica (MRI). Il metodo, sviluppato inizialmente per la banda VHF, è adatto ad essere esteso a frequenze superiori ma non a frequenze inferiori. In questo caso, la segmentazione (comunque necessaria per l'applicazione delle tecniche numeriche) viene applicata successivamente, direttamente sulla mappa 3D delle proprietà dielettriche.

1.4.3 *Metodi di soluzione*

Una volta attribuite le proprietà dielettriche a ciascun segmento, è necessario dedurre dalle equazioni di Maxwell un insieme di equazioni differenziali o integrali che ben si adattino al problema che si vuole studiare ed alla geometria scelta per i segmenti. Si deve poi individuare un approccio che permetta di trasformare queste equazioni in un sistema risolvibile numericamente ed infine studiare per quest'ultimo l'algoritmo di soluzione più efficiente.

I metodi disponibili sono numerosi e diversificati [10],[11]; tra quelli più diffusi ricordiamo il *metodo di momenti*, il metodo delle *differenze finite*, il metodo degli *elementi finiti*, il metodo *FDTD* (differenze finite nel dominio del tempo).

Il metodo dei momenti è adatto soprattutto ai problemi che utilizzano pochi segmenti macroscopici, poiché richiede una disponibilità di memoria proporzionale a N^2 ed un tempo di calcolo proporzionale a N^3 , esigenze che divengono proibitive con un altissimo numero N di segmenti, come quello che si ha utilizzando *voxel* millimetrici. Al contrario, i metodi alle differenze finite (compreso il metodo FDTD) hanno esigenze di memoria e tempo di calcolo direttamente proporzionali a N . D'altra parte, il numero di segmenti N necessari a questi ultimi è intrinsecamente maggiore di quello necessario al metodo dei momenti, a causa dell'esigenza di

modellare, oltre al soggetto esposto, anche una cospicua regione di spazio intorno ad esso, in modo da soddisfare le necessarie condizioni al contorno.

1.5 L'APPROSSIMAZIONE QUASI-STATICA

Alle basse frequenze si fa uso della cosiddetta *approssimazione quasi-statica*. Tale approssimazione permette una grande semplificazione delle equazioni che descrivono l'accoppiamento tra campo elettromagnetico e tessuti biologici. Come vedremo questa approssimazione può essere applicata quando sussistono tre distinte condizioni. La prima condizione permette di trascurare gli effetti di propagazione e di considerare il campo elettrico ed il campo magnetico come agenti fisici indipendenti, che danno origine a due problemi distinti: il *problema elettrico* ed il *problema magnetico*. Tale condizione è verificata quando le dimensioni del problema, intese come massima dimensione del teatro espositivo, siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda.

Una ulteriore semplificazione del problema magnetico è possibile quando si possa considerare trascurabile il contributo al campo magnetico generato dalle correnti indotte dal campo magnetico stesso. Ciò è sufficiente per affermare che il campo magnetico impresso non risulti significativamente perturbato dalle correnti indotte.

L'ultima condizione permette di semplificare il problema elettrico ed è verificata quando i tessuti dell'organismo esposto possono essere considerati come buoni conduttori. L'approssimazione di buon conduttore, fa sì che il problema elettrico possa essere separato in due problemi, da risolvere in serie. Il primo problema, detto *problema esterno*, ha per incognita la carica superficiale indotta dal campo elettrico sulla superficie dell'organismo esposto, che può essere determinata con le tecniche dell'elettrostatica grazie alla prima condizione. Nota tale carica superficiale, si risolve il cosiddetto *problema interno*, reintroducendo le derivate nel tempo e determinando la densità di corrente indotta dal campo elettrico internamente all'organismo esposto, sostenuta dalla *variazione di carica superficiale*.

1.6 PRECEDENTI ESPERIENZE IN DOSIMETRIA DEL GRUPPO DI RICERCA

Lo studio del dottorato è stato interamente svolto presso l'IFAC-CNR (Istituto di Fisica Applicata "Nello Carrara" di Firenze) e più in particolare nell'ambito della linea di ricerca denominata "Protezione dai campi elettromagnetici" il cui responsabile è il dott. Daniele Andreuccetti.

Prima di descrivere più approfonditamente cosa è stato realizzato nell'ambito del dottorato, è opportuno citare quali sono le passate esperienze del gruppo di ricerca relativamente alla dosimetria, che hanno costituito il bagaglio di partenza su cui basare tutte le attività legate al dottorato.

Il gruppo di ricerca si è interessato fin dal 1986 al problema dell'estensione verso le basse frequenze delle norme di sicurezza che regolamentano l'esposizione ai campi elettromagnetici non ionizzanti [12]. Per incarico della Giunta Regionale Toscana, fu successivamente studiata a fondo la letteratura in tema di dosimetria [13] ed effetti biologici [14] dei campi a bassa frequenza (inferiore a circa 300 kHz), giungendo ad elaborare una proposta di normativa regionale per popolazione e lavoratori che abbracciava con continuità l'intervallo di frequenza da 10 Hz a 300 GHz [15][16][17] (saldandosi a 100 kHz alle preesistenti normative IRPA-1988). Nell'aprile 1990, la proposta divenne raccomandazione ufficiale della Giunta Regionale. Questa esperienza ha consentito successivamente di analizzare in modo critico alcuni aspetti delle normative internazionali nel frattempo emanate.

Una vera e propria attività di ricerca sul tema della dosimetria sperimentale e numerica in condizioni quasistatiche ha preso l'avvio nel 1991 con la partecipazione al Progetto Tematico del Comitato Fisica del CNR su "Campi elettromagnetici non ionizzanti in biomedicina", in cui il gruppo era coinvolto con una unità operativa dedicata alla "Dosimetria del campo magnetico a bassissima frequenza". In questo contesto furono progettati un dispositivo a cella di Helmholtz di grandi dimensioni, adatto ad esporre fantocci salini al campo magnetico a bassa frequenza (fino ad alcune decine di chilohertz) [18] ed un sensore in grado di effettuare misure di densità di corrente indotta. Fu messo a punto un modello numerico basato sul metodo delle differenze finite per il calcolo della densità di corrente indotta in oggetti biologici di geometria piana esposti al campo magnetico in regime quasistatico [19]. Infine, furono eseguite numerose misure di densità di corrente indotta nei fantocci salini, che servirono anche a validare il modello di calcolo numerico. Parte di questo lavoro fu svolto nell'ambito di una Tesi di Laurea in Fisica dal titolo "Dosimetria del campo magnetico a bassissima frequenza: progettazione, realizzazione e calibrazione di un apparato per le misure" [20].

Successivamente, la ricerca è proseguita soprattutto sul versante del perfezionamento del metodo numerico e della sua applicazione al problema dei varchi magnetici, anche nell'ambito di una collaborazione informale con l'Istituto Superiore di Sanità (ISS). In particolare, venne estesa la procedura di calcolo in modo da renderla adatta ad operare su modelli non omogenei. A questo fine, venne ideata una metodologia che, partendo dalle immagini del Visible Human Project (VHP), portava a costruire modelli numerici ad alta risoluzione delle sezioni dell'organismo

umano, in cui ogni cella quadrata elementare era caratterizzata dalle proprietà dielettriche che competono al tessuto biologico che la costituisce, alla frequenza di interesse [21],[22]. La procedura di calcolo e la metodologia di costruzione dei modelli digitali delle sezioni dell'organismo venne applicata alla risoluzione di problemi dosimetrici esemplificativi [23] e reali [24] conseguenti all'esposizione di individui a vari tipi di varchi magnetici. Parte di questo lavoro ha costituito materia per una borsa di studio CNR N.21.16.18 (Comitato 13 - Scienze e tecnologie dell'ambiente e dell'habitat) su "Impatto ambientale delle sorgenti di campi elettromagnetici a radiofrequenza e microonde (50 Hz - 3 GHz): sorveglianza fisica, valutazione dell'esposizione" erogata nel corso del 1997. Ancora più recentemente, le procedure sopra descritte sono state utilizzate per trattare problemi esemplificativi connessi con l'esposizione ad elettrodotti e piccoli elettrodomestici [25].

Dal 2000 il lavoro sulla dosimetria è stato interrotto, sostanzialmente per mancanza di risorse. L'emanazione della direttiva 2004/40/EC ed il dottorato hanno costituito lo spunto per riprendere tale attività.

1.7 CONTENUTI DELLA TESI DI DOTTORATO

Lo studio alla base di questa tesi di dottorato si è concentrato sulla dosimetria numerica in ambito quasi statico e si è articolato secondo il percorso descritto di seguito, che ha poi ispirato anche la struttura della tesi stessa.

Per prima cosa è stata realizzata un'applicazione per la visualizzazione 3D dei modelli (a falsi colori), dotata di funzionalità avanzate (cambiamento del punto di vista, cambiamento di scala (zoom), rotazione, sezionamento, selezione dei tessuti etc.). Questa applicazione è stata poi ulteriormente sviluppata in modo da mostrare, oltre ai tessuti, anche le mappe di conducibilità e soprattutto quelle di densità di corrente prodotte dalle procedure di calcolo (Capitolo 2).

I modelli di organismo disponibili rappresentano un soggetto in postura eretta e questo fatto è avvertito come un grosso limite dalla comunità scientifica, nel caso in cui si vogliano trattare tipologie di esposizione nelle quali il soggetto esposto assuma posture differenti. Per tale motivo si è dato ampio spazio allo sviluppo ed al perfezionamento di un algoritmo su base geometrica per l'articolazione dell'organismo umano, che permettesse in particolare di rappresentare le posture più tipiche assunte in ambito occupazionale (Capitolo 2).

Parallelamente allo studio dell'algoritmo di articolazione, è stata affrontata la parte dosimetrica vera e propria. Dopo un'attenta analisi della letteratura, sono stati individuati i metodi numerici di

riferimento per la soluzione del problema dosimetrico, sia nel caso di esposizione a campo magnetico sia nel caso di esposizione al campo elettrico.

Nella tesi vengono dapprima passati in rassegna i metodi presi in considerazione, ed in seguito si approfondisce la trattazione di quelli effettivamente scelti; tale trattazione approfondita prende in considerazione sia l'analisi delle equazioni differenziali di base, sia la loro trasformazione in equazioni algebriche (discretizzazione, Capitolo 3).

In un capitolo specifico, si analizzano i dettagli relativi alle applicazioni che implementano i metodi numerici scelti. Grande attenzione viene dedicata alle strategie di ottimizzazione, per la riduzione sia delle risorse di memoria necessarie al funzionamento sia dei tempi di calcolo (Capitolo 4).

Una volta terminata la presentazione dei metodi di calcolo e delle strategie impiegate per la loro implementazione sotto forma di programmi, si illustrano i risultati della loro validazione. Si tratta principalmente di confronti con modelli analitici relativi all'esposizione di oggetti omogenei di forma semplice. Avendo inoltre a disposizione i risultati di misure effettuate su fantocci salini, nel caso di solo campo magnetico impresso, si presenta anche il confronto dei risultati del calcolo con dati sperimentali (Capitolo 5).

Il capitolo finale della tesi è dedicato allo studio di due casi di esposizione in ambito occupazionale a cui sono state applicati tutti gli strumenti sviluppati nell'ambito del Dottorato (Capitolo 6).

2 RAPPRESENTAZIONE DIGITALE DELL'ORGANISMO UMANO

In questo capitolo si descriveranno le attività direttamente legate alla rappresentazione digitale del corpo umano, la cui disponibilità costituisce un elemento fondamentale per l'applicazione di tecniche numeriche ai problemi di dosimetria. Le caratteristiche dei modelli di organismo assumono particolare rilevanza in considerazione del fatto che da queste dipendono i metodi di calcolo utilizzabili ed il modo con cui questi sono implementati. Dopo la descrizione del modello dell'organismo umano scelto come riferimento per la tesi, si affronta l'aspetto della associazione delle caratteristiche elettriche ad ogni tessuto.

I modelli di organismo disponibili rappresentano un soggetto in postura eretta e non sono quindi adatti per rappresentare molte delle posture tipicamente assunte negli ambienti di lavoro. Si è voluto superare tale limitazione sviluppando un algoritmo che permette di rappresentare posture dell'organismo più realistiche rispetto a quella originaria. Tale algoritmo viene presentato nella parte centrale del capitolo.

Infine si accennerà alle tecnologie utilizzate per lo sviluppo di una applicazione per la visualizzazione tridimensionale dei modelli di organismo umano, delle relative caratteristiche elettriche e dei risultati del calcolo. Tale applicazione è stata utilizzata per produrre gran parte delle illustrazioni inserite in questa tesi.

2.1 IL MODELLO DI ORGANISMO DI RIFERIMENTO

Il modello digitale del corpo umano a cui ci si è riferiti è quello realizzato nell'ambito del "Visible Human Project" (VHP). Con questo nome viene indicato un progetto dell'istituto statunitense National Library of Medicine, finalizzato alla creazione di un atlante digitale anatomico del corpo umano, maschile e femminile, da utilizzare sia a scopo didattico sia scientifico. L'atlante consiste di varie serie complete di immagini digitalizzate, ottenute da risonanza magnetica nucleare, tomografia computerizzata e fotografie di sezioni dei cadaveri di un uomo e di una donna che hanno donato il proprio corpo alla scienza.

Presso la Brooks Air Force Base a San Antonio, Texas, USA, ed in particolare all'Air Force Research Laboratory, Human Effectiveness Division (AFRL/HED), le immagini delle sezioni VHP sono state utilizzate per sviluppare dei modelli digitali di organismo in tre dimensioni. Ciò ha implicato il riconoscimento del tessuto corrispondente ad ogni pixel delle sezioni VHP. I modelli di organismo utilizzati presso l'IFAC-CNR sono una elaborazione di quelli sviluppati all'AFRL/HED.

I file utilizzati per la memorizzazione dei dati possono essere considerati come lunghe stringhe di byte, ciascuno dei quali corrisponde a un blocchetto cubico, di lato uguale alla risoluzione. Il valore numerico del byte indica il tipo di tessuto che costituisce il blocchetto corrispondente secondo il contenuto della Tabella 3. La posizione del blocchetto nello spazio si determina in base a quella del corrispondente byte all'interno del file e tenendo conto che i dati sono organizzati per sezioni assiali. In particolare, le sezioni assiali si succedono dall'alto verso il basso. All'interno di ogni sezione assiale, i dati sono disposti in righe coronali, che si succedono dal dorso verso la fronte. Infine, all'interno di ogni riga, le celle si succedono da destra verso sinistra (riferite al modello). La composizione delle celle memorizzate nel file costituisce il più piccolo parallelepipedo che contiene il modello dell'organismo. Le celle esterne al modello dell'organismo ma interne al parallelepipedo, sono formate dal cosiddetto *tessuto di riempimento* (a cui si associano le caratteristiche del vuoto).

I modelli AFRL/HED e quelli utilizzati all'IFAC-CNR sono disponibili con le risoluzioni di 1mm, 2mm e 3mm. Per le attività del Dottorato ci si è riferiti al modello meno dettagliato per contenere oneri computazionali, tempi di calcolo e occupazione di memoria. Il modello con risoluzione 3 mm a corpo intero è contenuto in un parallelepipedo con spigoli composti da 196 celle in direzione x , 114 celle in direzione y e 626 celle in direzione z, per un totale di 13.987.344 celle e quindi altrettanti byte.

In Tabella 3, per ciascun tessuto, oltre al codice ed al nome, è indicato il numero di celle e la percentuale sul totale nel caso del modello con cella di lato pari a 3mm; sono inoltre evidenziati i tessuti numericamente più significativi. Come si può notare gran parte delle celle (oltre il 70% del totale) sono composte da tessuto di riempimento (codice 56, vuoto). Su un totale di 13.987.344 celle, solo 3.875.766 celle rappresentano l'organismo vero e proprio. Di ciò si è tenuto conto nel momento di scegliere ed implementare i metodi di calcolo delle grandezze dosimetriche.

Un altro dato importante che è servito nel momento di scegliere i metodi numerici più adatti a risolvere questo tipo di problema è quello del numero di celle superficiali che, nel caso del modello di riferimento sono 213.015.

Codice	Tessuto	N celle	% celle	Codice	Tessuto	N celle	% celle
0	Undefined	0	0	29	Liver	66244	0,47
1	Air	76433	0,54	30	LungDeflated	25849	0,18
2	Aorta	0	0	31	LungInflated	99832	0,71
3	Bladder	3812	0,02	32	Lymph	2677	0,01
4	Blood	24094	0,17	33	MucousMembrane	17621	0,12
5	BloodVessel	20845	0,14	34	Muscle	1588186	11,3
6	BodyFluid	13575	0,09	35	Nail	128	$9 \cdot 10^{-3}$
7	BoneCancellous	60116	0,42	36	Nerve	11764	0,08
8	BoneCortical	92457	0,66	37	Oesophagus	0	0
9	BoneMarrow	103047	0,73	38	Ovary	0	0
10	BrainGreyMatter	20628	0,14	39	Pancreas	3116	0,02
11	BrainWhiteMatter	16348	0,11	40	Prostate	0	0
12	BreastFat	0	0	41	Retina	0	0
13	Cartilage	18679	0,13	42	SkinDry	167810	1,19
14	Cerebellum	4321	0,03	43	SkinWet	0	0
15	CerebroSpinalFluid	6750	0,04	44	SmallIntestine	28592	0,20
16	Cervix	0	0	45	SpinalChord	0	0
17	Colon	17155	0,12	46	Spleen	8988	0,06
18	Cornea	12	$8 \cdot 10^{-5}$	47	Stomach	5661	0,04
19	Duodenum	0	0	48	Tendon	93005	0,66
20	Dura	0	0	49	Testis	783	$5 \cdot 10^{-3}$
21	EyeSclera	120	$8 \cdot 10^{-4}$	50	Thymus	0	0
22	Fat	1245612	8,90	51	Thyroid	0	0
23	GallBladder	384	$2 \cdot 10^{-3}$	52	Tongue	0	0
24	GallBladderBile	711	$5 \cdot 10^{-3}$	53	Tooth	489	$3 \cdot 10^{-3}$
25	Gland	5705	0,04	54	Trachea	0	0
26	Heart	11320	0,08	55	Uterus	0	0
27	Kidney	12442	0,08	56	Vacuum	10111578	72,2
28	Lens	22	$1 \cdot 10^{-3}$	57	VitreousHumor	433	$3 \cdot 10^{-3}$

Tabella 3: tabella di associazione codice-tessuto

Come già accennato in precedenza, il modello originale AFRL/HED è stato rielaborato. Tale rielaborazione ha riguardato sia la riorganizzazione dei dati (ed in particolare delle righe coronali che nei modelli AFRL/HED sono ordinate dalla fronte verso il dorso) sia l'aggiunta di una

intestazione che ne documenta la struttura e le dimensioni, in modo da facilitarne l'utilizzo nelle applicazioni di calcolo e di visualizzazione. L'intestazione, che nel file precede i dati veri e propri, è costituita da 10 byte, attraverso i quali si codificano le informazioni seguenti:

- risoluzione, rappresentata dalla dimensione della cella in millimetri (1 byte);
- indicatore ('X', 'Y' oppure 'Z') della variabile del ciclo "esterno" (1 carattere ASCII maiuscolo);
- numero di passi del ciclo "esterno" (ovvero numero di celle nella direzione indicata dal carattere precedente, 2 byte LSF);
- indicatore ('X', 'Y' oppure 'Z') della variabile del ciclo "di mezzo" (1 carattere ASCII maiuscolo);
- numero di passi del ciclo "di mezzo" (ovvero numero di celle nella direzione indicata dal carattere precedente, 2 byte LSF);
- indicatore ('X', 'Y' oppure 'Z') della variabile del ciclo "interno" (1 carattere ASCII maiuscolo);
- numero di passi del ciclo "interno" (ovvero numero di celle nella direzione indicata dal carattere precedente, 2 byte LSF).

I "cicli" a cui si fa riferimento in questo contesto sono ovviamente i loop di programma attraverso i quali si leggono o si scrivono i contenuti delle celle del modello.

Questa intestazione permette di gestire organizzazioni diverse da quella per sezioni assiali, caso nel quale si ha che Z è la variabile di ciclo esterno, Y quella di ciclo mediano ed infine X è la variabile di ciclo interno.

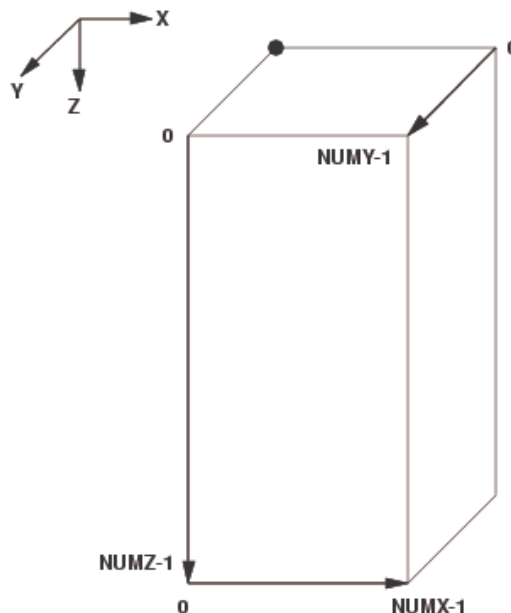


figura 1: definizione del sistema di coordinate

Nel seguito faremo uso di un sistema di riferimento in cui l'asse X è diretto orizzontalmente dalla destra del modello verso la sua sinistra, l'asse Y è diretto orizzontalmente dal dorso del modello verso la sua fronte e l'asse Z è diretto verticalmente dalla testa del modello verso i suoi piedi. Quando non diversamente espresso, l'origine della coordinate è posta quindi nello spigolo superiore-posteriore-destro (riferito al modello) del parallelepipedo ideale che racchiude il modello stesso. Queste convenzioni sono sintetizzate in figura 1.

Il sistema di riferimento del modello di organismo, è utilizzato anche per definire la posizione delle sorgenti di campo rispetto al soggetto esposto ed assume quindi il significato di sistema di riferimento del teatro espositivo.

2.2 CALCOLO DELLE PROPRIETÀ DIELETTRICHE DEI TESSUTI

La determinazione della distribuzione della densità di corrente indotta in un organismo esposto a campo elettromagnetico mediante soluzione numerica delle equazioni che governano i meccanismi di accoppiamento, richiede che siano note le proprietà dielettriche di tutti i tessuti interessati. Tali proprietà sono rappresentate dalla costante dielettrica relativa complessa $\hat{\epsilon}$. La definizione della costante dielettrica relativa complessa può essere fatta discendere dall'equazione di Ampere-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

dove $\vec{J}$ è la densità di corrente e $\vec{D}$ la densità di flusso elettrico.

La densità di corrente di cariche libere può essere espressa in funzione del campo elettrico attraverso la conducibilità elettrica σ_f :

$$\vec{J} = \sigma_f \vec{E} \quad (2.2)$$

Se il materiale considerato è un *dielettrico*, la densità di flusso elettrico $\vec{D}$ è legata al campo elettrico $\vec{E}$ ed al vettore *polarizzazione elettrica* $\vec{P}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.3)$$

Con la (2.2) si tiene conto delle tecniche *ohmiche*. Quando è presente solo questo tipo di perdite, la polarizzazione è in fase e proporzionale al campo elettrico:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2.4)$$

dove χ è la *suscettività elettrica*.

Le cosiddette *perdite dielettriche* invece sono legate all'interazione tra il campo elettrico ed i dipoli elettrici presenti nel materiale. In presenza di perdite dielettriche, la polarizzazione non riesce a mantenersi in fase con il campo elettrico alle frequenza di lavoro (supponendo di essere in regime armonico sinusoidale). Definito con Ψ il ritardo di fase di $\vec{P}$ rispetto ad $\vec{E}$ si può scrivere che:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi e^{-j\Psi} \vec{E} = \epsilon_0 \chi (\cos \Psi - j \sin \Psi) \vec{E} \quad (2.5)$$

e quindi che:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \chi [1 + (\cos \Psi - j \sin \Psi)] \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon - j \epsilon^*) \vec{E} \quad (2.6)$$

dove

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 + \chi \cos \Psi \\ \epsilon^* &= \chi \sin \Psi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Utilizzando le precedenti espressioni, la (2.1) diviene:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma_f \vec{E} + j\omega \vec{D} = [\sigma_f + j\omega \epsilon_0 (\epsilon - j \epsilon^*)] \vec{E} \quad (2.8)$$

che può essere anche riscritta nella seguente forma:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E} \quad (2.9)$$

dove rimane definita la *costante dielettrica relativa complessa*:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon - j \left(\epsilon^* + \frac{\sigma_f}{\omega \epsilon_0} \right) \quad (2.10)$$

E' opportuno osservare che dal punto di vista fenomenologico e quindi sperimentale, non è di fatto possibile distinguere le perdite dielettriche da quelle ohmiche. Quella che si osserva nel materiale in cui sia presente un campo elettrico è una corrente con una componente *in fase* ed una *in quadratura* rispetto al campo stesso; alla prima di queste componenti risultano associate le perdite di energia che portano, tra l'altro, al riscaldamento del materiale.

In definitiva, è possibile scrivere la (2.9) nel seguente modo:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{tot} = j\omega \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E} \quad (2.11)$$

A seconda dell'effettivo comportamento del materiale o della convenienza di notazione, potremo decidere se mettere in evidenza il carattere *dielettrico* delle perdite scrivendo:

$$\vec{J}_{tot} = j\omega \epsilon_0 (\epsilon^I - j \epsilon^II) \vec{E} \quad (2.12)$$

oppure dare alle stesse una interpretazione di tipo *ohmico*:

$$\vec{J}_{tot} = (\sigma + j\omega \epsilon_0 \epsilon^I) \vec{E} \quad (2.13)$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\perp} &= \text{Re}(\hat{\mathcal{E}}) \\ \mathcal{E}^{\parallel} &= -\text{Im}(\hat{\mathcal{E}}) \\ \sigma &= -\omega\epsilon_0 \text{Im}(\hat{\mathcal{E}})\end{aligned}\tag{2.14}$$

dove valgono anche le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\perp} &= \mathcal{E} \\ \mathcal{E}^{\parallel} &= \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \mathcal{E}^* + \frac{\sigma_f}{\omega\epsilon_0} \\ \sigma &= \sigma_f + \omega\epsilon_0 \mathcal{E}^*\end{aligned}\tag{2.15}$$

Per quanto ci riguarda, useremo nel seguito l'espressione:

$$\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\tag{2.16}$$

ed in particolare

$$\sigma = -\omega\epsilon_0 \text{Im}(\hat{\mathcal{E}})\tag{2.17}$$

2.2.1 Modello parametrico

Nel loro lavoro estremamente completo [4] C.Gabriel e collaboratori, partendo da una indagine della letteratura esistente [5] e da una notevole mole di dati sperimentali originali [6], hanno proposto un modello parametrico [7] per la valutazione delle proprietà dielettriche di un gran numero di tessuti umani nell'intervallo di frequenza da 10 Hz a 100 GHz. Il modello è basato sulla sovrapposizione di quattro relazioni di dispersione di tipo *Cole-Cole* [26].

La relazione di dispersione di Cole-Cole è a sua volta basata sulla teoria del rilassamento di Debye, che fornisce la seguente espressione per la dipendenza della *costante dielettrica relativa complessa* dalla frequenza nei pressi di una regione di dispersione di un dato tessuto:

$$\hat{\mathcal{E}} = a + \frac{b}{1 + j\omega\tau}\tag{2.18}$$

dove a , b e τ sono costanti (indipendenti dalla frequenza ma diverse per ogni materiale) e ω è la pulsazione angolare.

La relazione di Cole-Cole è una generalizzazione dell'equazione di Debye, avente lo scopo di tenere conto (mediante l'introduzione di un ulteriore parametro d) dell'allargamento della regione di dispersione dovuto alla complessità della struttura e della composizione dei materiali biologici:

$$\hat{\mathcal{E}} = a + \frac{b}{1 + (j\omega\tau)^{(1-d)}}\tag{2.19}$$

Il risultato complessivo della sovrapposizione di quattro dispersioni Cole-Cole a quattro diverse frequenze è espresso dalla relazione seguente, nella quale è stato introdotto anche un termine σ_0 , che rappresenta il limite della conducibilità in corrente continua:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_{\infty} - j \frac{\sigma_0}{\omega \epsilon_0} + \sum_{n=1}^4 \frac{b_n}{1 + (j\omega\tau_n)^{1-d_n}} \quad (2.20)$$

in particolare, utilizzando la (2.17) si ottiene l'espressione della conducibilità:

$$\sigma = -\omega \epsilon_0 \operatorname{Im}(\hat{\epsilon}) = \sigma_0 - \omega \epsilon_0 \sum_{n=1}^4 \operatorname{Im} \left[\frac{b_n}{1 + (j\omega\tau_n)^{1-d_n}} \right] \quad (2.21)$$

Questo modello richiede evidentemente che si determini il valore di 14 parametri per ciascun tessuto modellato. Il lavoro di C.Gabriel e collaboratori ha portato all'individuazione dei parametri relativi a 45 tessuti umani diversi; sfruttando delle analogie tra i tessuti (alcune delle quali indicate dagli stessi autori) il modello è stato esteso in modo da coprire i 57 tessuti gestiti dai programmi di dosimetria numerica realizzati all'IROE [21].

2.3 SVILUPPO DI UN ALGORITMO DI ARTICOLAZIONE DEL MODELLO DI ORGANISMO

Le tecniche di calcolo alle differenze finite sono diffusamente utilizzate per la soluzione numerica di problemi di dosimetria elettromagnetica in tre dimensioni, sia in regime quasi-statico a basse frequenze, sia a frequenze più alte. Per questo tipo di analisi possono essere utilizzati vari modelli di organismo umano costituiti da voxel cubici. In genere però, tali modelli rappresentano un soggetto in posizione eretta e non possono essere direttamente utilizzati per analizzare posture differenti, come necessario ad esempio per molte esposizioni negli ambienti di lavoro. Ciò vale anche per il modello di riferimento che, essendo stato sviluppato a partire dal sezionamento di un cadavere, è caratterizzato anche da caviglie iper-estese.

Nell'ambito della dosimetria numerica dei campi elettromagnetici è dunque importante poter articolare il modello dell'organismo esposto in diverse posture, accertandosi che sia rispettata la continuità dei tessuti. D'altra parte non è invece strettamente necessario ricostruire in modo iper-realistico il processo di articolazione, che risulterebbe molto oneroso in termini di indagini anatomiche e per di più adattato ad un particolare modello. L'algoritmo presentato nel seguito cerca un compromesso tra la corretta modellazione dell'anatomia dell'articolazione e l'applicabilità dello stesso metodo alle diverse articolazioni sia dello stesso modello sia di modelli differenti, senza la necessità di onerose analisi anatomiche.

2.3.1 *L'algoritmo di articolazione*

Durante lo sviluppo dell'algoritmo di articolazione si è cercato di rispettare alcuni prerequisiti considerati particolarmente importanti:

- (R1) l'applicabilità dello stesso algoritmo ad articolazioni diverse;
- (R2) la possibilità di tenere conto delle diverse caratteristiche dei tessuti ed in particolare di distinguere almeno tra scheletro e parti molli;
- (R3) il rispetto della continuità dei tessuti con particolare riferimento ai vasi ed ai tessuti del sistema nervoso;
- (R4) il contenimento entro limiti ragionevoli dell'onerosità del calcolo, per non rendere proibitiva l'articolazione di modelli di organismo ad alta risoluzione. In particolare, si considerano sia i tempi di calcolo sia le risorse di memoria necessarie per la soluzione del problema.

Per tenere conto dei primi tre requisiti elencati, si è pensato di partire dalla modellazione della elasticità dei tessuti. In particolare, si è considerato ciascun elemento del modello dell'organismo legato a quelli circostanti attraverso forze con intensità dipendente dalle mutue distanze tra gli elementi stessi, che risultano nulle nel caso dell'organismo non articolato. In pratica, si riconduce lo studio dell'articolazione a quello di una griglia tridimensionale di celle cubiche, in cui le forze di interazione tra i vari elementi del modello hanno per direzione quella dei segmenti che uniscono i centri.

La griglia tridimensionale subisce delle deformazioni durante il processo di articolazione, ma la mutua disposizione delle celle ed in particolare le relazioni di vicinanza tra i tessuti, tendono ad essere mantenute per effetto dell'imposizione dei vincoli elastici. L'utilizzo di un modello di questo tipo, permette di assegnare ad ogni tessuto le opportune proprietà elastiche, in linea di principio differenti da quelle di altri tessuti.

2.3.2 *Modello elastico completo in due dimensioni*

Per descrivere le basi dell'algoritmo di articolazione, evitando di appesantire troppo la trattazione, si farà riferimento al caso bidimensionale. L'introduzione della terza dimensione è comunque una immediata estensione.

Per scrivere l'espressione che regola la posizione del generico punto $P0$ si consideri la figura 2.

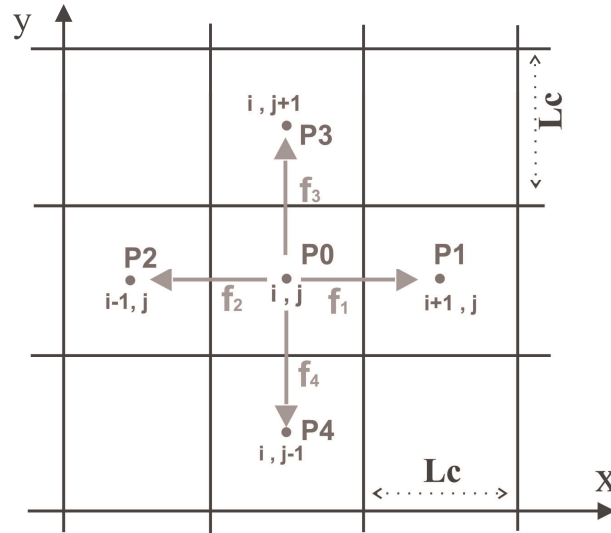


figura 2: schema di applicazione del modello elastico in 2 dimensioni.

Il punto $P0$ è soggetto alle quattro forze $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ e $\vec{f}_4$ ed all'equilibrio si ha:

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = 0 \quad (2.22)$$

Si consideri dunque l'espressione della generica forza di richiamo $\vec{f}_i$ che la cella con centro P_i esercita sulla cella con centro $P0$:

$$\vec{f}_i = -k_i \cdot (|P_i - P_0| - L_c) \cdot \frac{(P_i - P_0)}{|P_i - P_0|} \quad (2.23)$$

dove L_c è il lato delle celle della griglia. Esplicitando la dipendenza dalle singole coordinate si ottiene:

$$\vec{f}_i = -k_i \cdot \left(1 - \frac{L_c}{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}} \right) \cdot [(x_i - x_0) \cdot \hat{i}_x + (y_i - y_0) \cdot \hat{i}_y] \quad (2.24)$$

Considerando un grigliato di $N \times M$ celle, si ottiene un sistema di $N \times M$ equazioni vettoriali analoghe alla (2.24) e quindi, passando alle proiezioni sugli assi di riferimento, $2 \times N \times M$ equazioni scalari in altrettante incognite ($x_{i,j}$ e $y_{i,j}$ con i e j che vanno da 0 a $N-1$ e a $M-1$ rispettivamente).

2.3.3 Algoritmo semplificato in due dimensioni

Risolvere numericamente un sistema di equazioni non lineari come quello appena descritto, può risultare molto oneroso al crescere delle dimensioni del problema. Si è dunque scelto di considerare, almeno in prima analisi, un modello più semplice, che si ispirasse comunque a quello del precedente paragrafo.

Ci si è voluti ricondurre in particolare alla soluzione di sistemi lineari, anche perché ciò comporta l'utilizzo di procedure numeriche molto più semplici e rapide di quelle necessarie per la soluzione di problemi non lineari. Si è inoltre cercato di fare in modo che la coordinata x_0 del

punto $P0$ dipendesse dalle coordinate x dei punti vicini ma non dalle relative coordinate y e viceversa. Ciò comporta la soluzione di due problemi indipendenti di $N \times M$ equazioni, uno per determinare x e l'altro per y , piuttosto che la soluzione di un unico problema di $2 \times N \times M$ equazioni. Questo può risultare vantaggioso in termini di risorse di memoria necessarie. Inoltre, lavorando in tre dimensioni, nel caso di movimenti delle articolazioni paralleli ad un piano ortogonale ad uno degli assi del sistema di riferimento (piano a x , y o z costante), per effetto del disaccoppiamento, una coordinata rimane invariata e quindi non è necessario risolvere il relativo sistema di equazioni.

Con riferimento alla figura 2, un possibile modo per ottenere la linearizzazione del sistema di equazioni ed il disaccoppiamento delle variabili consiste nel sostituire nella (2.22) le seguenti:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= -k_1 [(x_1 - x_0 - L_c) \cdot \hat{i}_x + (y_1 - y_0) \cdot \hat{i}_y] \\ \bar{f}_2 &= -k_2 [(x_2 - x_0 + L_c) \cdot \hat{i}_x + (y_2 - y_0) \cdot \hat{i}_y] \\ \bar{f}_3 &= -k_3 [(x_3 - x_0) \cdot \hat{i}_x + (y_3 - y_0 - L_c) \cdot \hat{i}_y] \\ \bar{f}_4 &= -k_4 [(x_4 - x_0) \cdot \hat{i}_x + (y_4 - y_0 + L_c) \cdot \hat{i}_y]\end{aligned}\tag{2.25}$$

Applicando la (2.22), le espressioni delle coordinate (x_0, y_0) del punto $P0$ diventano:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3 + k_4 \cdot x_4}{\sum_i k_i} + (k_2 - k_1) \cdot L_c \\ y_0 &= \frac{k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 + k_3 \cdot y_3 + k_4 \cdot y_4}{\sum_i k_i} + (k_4 - k_3) \cdot L_c\end{aligned}\tag{2.26}$$

dove l'assegnazione del valore ai parametri k_i può essere effettuata seguendo vari approcci, alcuni dei quali verranno presentati nei prossimi paragrafi. Il primo termine del secondo membro delle espressioni (2.26) rappresenta una media pesata delle coordinate dei punti circostanti.

2.3.4 *Suddivisione del modello di organismo in porzioni*

Nel caso del fantoccio VHP ad alta risoluzione (lato della cella pari ad 1 mm) si hanno oltre 370 milioni di celle e dunque il problema dell'articolazione a corpo intero sarebbe caratterizzato da oltre 1 miliardo di incognite (3 coordinate per cella). Si è quindi pensato di applicare il processo di articolazione a porzioni del modello di organismo piuttosto che al corpo intero. Prima di poter modificare ciascuna porzione è necessario isolarla dalle altre; ciò può non risultare immediato nel caso in cui non sia possibile individuare un confine netto tra porzioni adiacenti. La struttura del modello di organismo permette infatti di distinguere i diversi tessuti, ma non di stabilire se il singolo voxel appartenga ad una specifica parte del corpo. Riferendosi alla figura 3, è risultato problematico l'isolamento delle braccia dal resto del corpo, caso che ha richiesto lo sviluppo di un approccio "ad hoc".

Le porzioni hanno sempre la forma di un parallelepipedo, in modo da utilizzare le stesse tecniche di rappresentazione e memorizzazione messe a punto per il corpo intero.

In figura 3 è rappresentata una possibile suddivisione in porzioni che permette di modellare alcune tra le posture di maggior interesse per applicazioni di dosimetria numerica in ambito occupazionale. Tale suddivisione potrebbe non risultare adeguata per altre applicazioni.

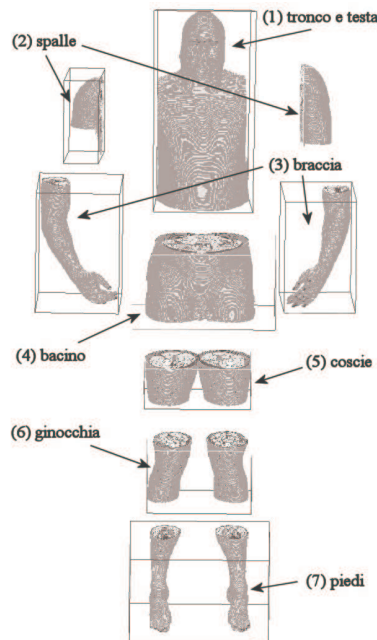


figura 3: suddivisione del modello in porzioni.

2.3.5 Applicazione dell'algoritmo semplificato a porzioni di modello

Per applicare l'algoritmo di articolazione semplificato è necessario classificare i voxel della porzione individuata secondo le seguenti categorie:

- (C1) i **voxel fissi**, cioè quelli la cui posizione non viene modificata durante il processo di articolazione;
- (C2) i **voxel vincolati**, cioè quelli la cui posizione viene determinata a priori;
- (C3) i **voxel soggetti a deformazione**, cioè quelli le cui coordinate sono calcolate risolvendo i sistemi di equazioni descritti in precedenza;
- (C4) i **voxel vuoti**, cioè quelli per cui non si ha interesse a determinare la posizione.

I sistemi di equazioni lineari del modello semplificato sono risolti solo per i voxel soggetti a deformazione, utilizzando come condizioni al contorno le coordinate degli elementi fissi e di quelli vincolati. I voxel vuoti non vengono invece presi in considerazione.

Nel caso dell'articolazione del ginocchio, la porzione di modello considerata è quella rappresentata in figura 4.

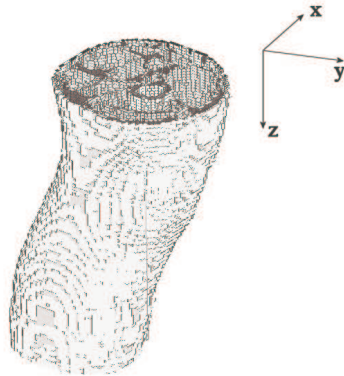


figura 4: porzione di modello VHP considerata per l'articolazione del ginocchio.

La porzione si raccorda a quelle confinanti (coscia e piede) presso quelle che chiameremo *sezioni di riferimento*, che, a riposo, sono ortogonali all'asse z.

La classificazione dei voxel secondo le categorie descritte in precedenza è effettuata nel seguente modo:

- (C1) i **voxel fissi** sono quelli appartenenti alla sezione di riferimento fissa e tutti quelli dello scheletro che, a riposo, si trovano a monte dello snodo (più in alto in figura 5).
- (C2) i **voxel vincolati** sono:
 - a. quelli della sezione di riferimento mobile, la cui posizione viene ricavata a partire da quella a riposo, applicando una rotazione rispetto allo snodo.
 - b. quelli dello scheletro che, a riposo, si trovano a valle dello snodo (più in basso in figura 5), la cui posizione viene ricavata a partire da quella a riposo, applicando una rotazione rispetto allo snodo.
 - c. quelli delle facce laterali, la cui posizione viene calcolata in base ad un algoritmo che mira ad ottenere una densità di celle uniforme su ciascuna faccia.
- (C3) i **voxel soggetti a deformazione** sono tutti gli altri, compresi quelli composti da tessuto di riempimento.
- (C4) non ci sono **voxel vuoti**.

Nel caso del ginocchio tutti i voxel sono caratterizzati dallo stesso coefficiente k . In questo caso, nelle espressioni (2.26), qualsiasi valore si adotti per k , scompare il secondo termine del secondo membro e le medie pesate diventano medie algebriche.

Per evitare sovrapposizioni tra elementi fissi, si è ritenuto opportuno classificare come soggette a deformazione le celle appartenenti allo scheletro che si trovano nelle immediate vicinanze dello snodo.

Come evidenziato dallo schema in figura 5, l'articolazione del ginocchio è caratterizzata da una rotazione intorno all'asse x e dunque ciascun voxel si muove su un piano con x costante. Per effetto del disaccoppiamento delle coordinate, è necessario risolvere i sistemi lineari di equazioni solo per y e z , mentre la coordinata x risulta non alterata dal processo di articolazione.

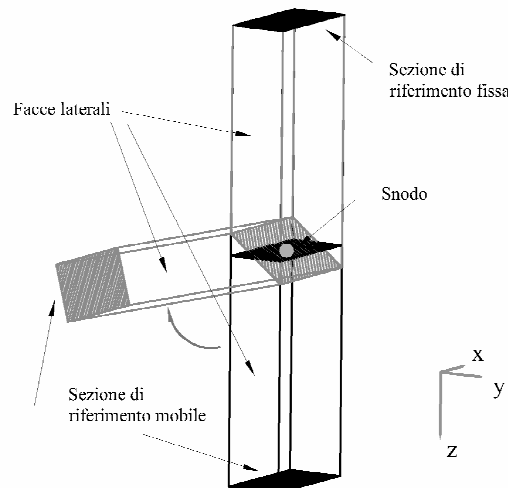


figura 5: schema utilizzato per l'articolazione del ginocchio.

Le caratteristiche dell'algoritmo descritto per il ginocchio risultano evidenziate se lo si applica alla rappresentazione schematizzata illustrata in figura 6.

Come si può notare su ciascuna delle facce laterali del solido articolato (b) la densità di celle è uniforme. In particolare, il numero di voxel sulle facce laterali è lo stesso prima e dopo l'articolazione ma, variando l'estensione delle facce, varia anche la densità di elementi su di esse.

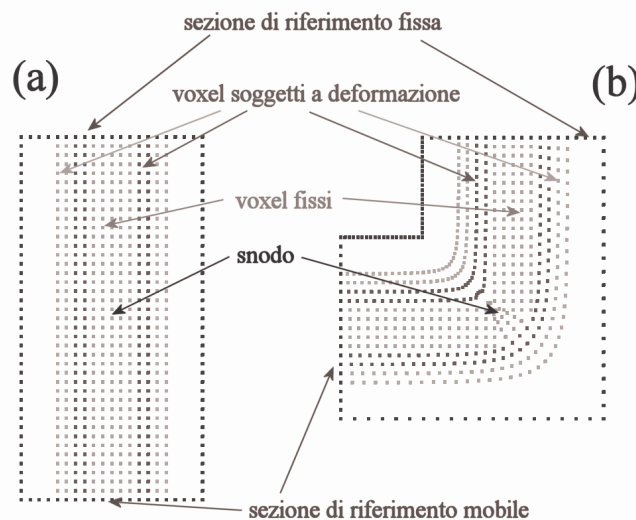


figura 6: rappresentazione schematizzata del ginocchio: (a) a riposo, (b) articolato con angolo pari a 90°.

L'articolazione della spalla rappresenta un caso diverso da quello del ginocchio. Riferendosi alla figura 7 ed alla figura 8, a riposo, le sezioni di riferimento fissa e mobile giacciono su piani diversi. Inoltre, mentre nel caso del ginocchio era facile determinare come le facce laterali si deformassero in seguito all'articolazione, nel caso della spalla ciò è meno immediato. In tal caso si è dunque deciso di utilizzare le sole sezioni di riferimento, svincolandosi dalle altre facce del solido che delimita la porzione di modello considerata. Ciò viene fatto attribuendo valori opportuni ai coefficienti k_i nella espressione (2.26) e classificando i voxel come segue:

- (C1) i **voxel fissi** sono quelli appartenenti alla sezione di riferimento fissa e tutti quelli dello scheletro che si trovano tra questa e lo snodo.
- (C2) i **voxel vincolati** sono:
 - a. quelli della sezione di riferimento mobile, la cui posizione viene ricavata a partire da quella a riposo, applicando una rotazione rispetto allo snodo.
 - b. quelli dello scheletro che si trovano a valle (procedendo lungo lo scheletro partendo dalla sezione di riferimento fissa verso quella mobile) dello snodo, la cui posizione viene ricavata a partire da quella a riposo, applicando una rotazione rispetto allo snodo.
- (C3) i **voxel soggetti a deformazione** sono tutti gli altri, esclusi quelli composti da tessuto di riempimento.
- (C4) i **voxel vuoti** sono tutti quelli composti da tessuto di riempimento.



figura 7: porzione di modello considerata per l'articolazione della spalla.

I voxel vuoti sono caratterizzati nella espressione (2.26) da un coefficiente k nullo; ciò implica che le coordinate di un generico voxel soggetto a deformazione non dipendono da quelle di

eventuali voxel vuoti adiacenti. Inoltre, quando le procedure numeriche iterano sulla porzione di modello da articolare, i voxel vuoti non vengono computati.

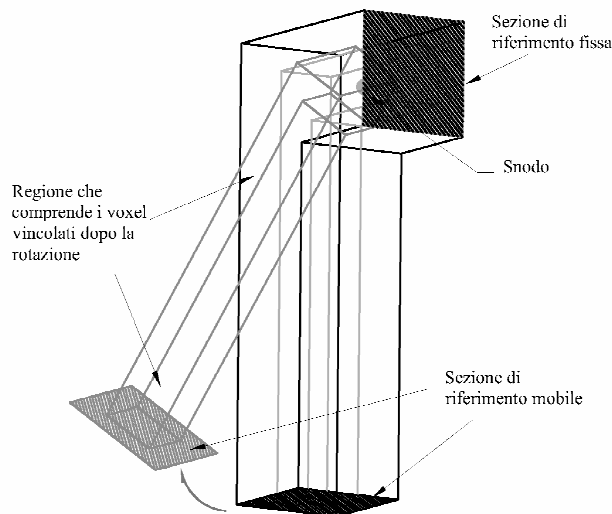


figura 8: schema utilizzato per l'articolazione della spalla.

In figura 9 sono riportati i risultati dell'applicazione dell'algoritmo descritto ad un modello di spalla schematizzato in 3 dimensioni.

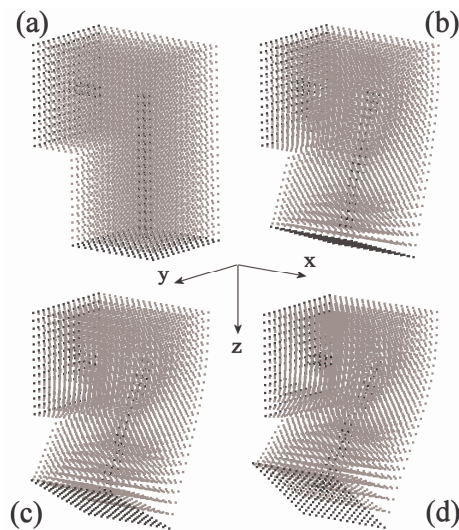


figura 9: rappresentazione schematizzata della spalla: (a) a riposo, (b) articolata con angolo pari a 20°, (c) articolato con angolo pari a 30°, (d) articolato con angolo pari a 40°.

2.3.6 Il ricampionamento

Le procedure che implementano il processo di articolazione permettono di ricavare le nuove coordinate dei centri dei voxel. In generale ciò implica che, per il modello articolato, non sia più rispettato il vincolo di voxel cubici di uguali dimensioni che caratterizzava il modello a riposo.

D'altra parte, per poter risolvere problemi di dosimetria elettromagnetica utilizzando algoritmi di calcolo alle differenze finite, è vantaggioso utilizzare modelli di organismo composti da voxel cubici, tutti di uguali dimensioni. A tal fine è necessario il riallineamento del modello articolato

alla struttura a voxel cubici del modello a riposo. A tale fase ci si riferisce con il nome di *ricampionamento*.

Il ricampionamento delle porzioni di modello articolato viene effettuato in due passi, che possono essere spiegati prendendo come riferimento la situazione illustrata in figura 10, che a sua volta riprende quanto è illustrato in figura 6. Si può notare come i voxel del modello articolato non ricampionato (b) siano caratterizzati da mutue distanze non uniformi. Il primo passo del ricampionamento consiste nella scelta di un grigliato regolare di riferimento a cui riallinearsi e nell'approssimazione delle coordinate di ciascun voxel del modello articolato con quelle del punto del grigliato più vicino. Ciò che si ottiene (c) è un modello ricampionato ma caratterizzato in generale da numerosi “buchi”; questi sono causati dal fatto che le mutue distanze tra i voxel del modello articolato possono essere maggiori di quelle che caratterizzano il modello a riposo. La seconda fase consiste quindi nell'attribuzione del tessuto corretto ai voxel corrispondenti a ciascuno dei “buchi” (d).

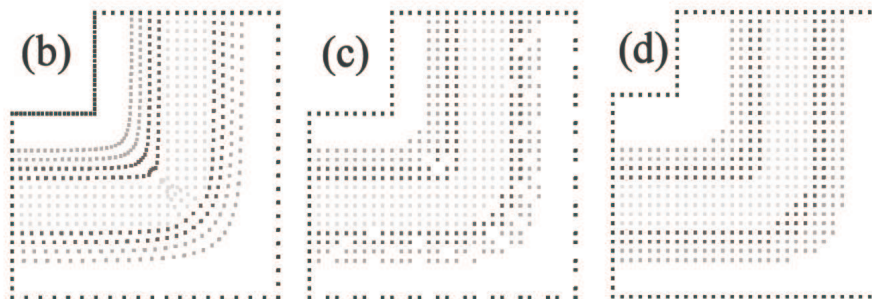


figura 10: processo di ricampionamento applicato alla rappresentazione schematizzata del ginocchio: (b) modello articolato ma non ricampionato, (c) modello articolato alla fine della prima fase del ricampionamento, (d) modello articolato alla fine della seconda fase del ricampionamento.

2.3.7 *Procedura per la generazione di modelli di organismo utilizzabili per valutazioni dosimetriche*

Una volta illustrate le singole fasi che compongono l'algoritmo di articolazione, si descrive infine la procedura secondo la quale è possibile articolare un modello di organismo in posture diverse da quella di origine, in modo da rappresentare, ad esempio, posture di interesse nell'ambito della dosimetria numerica dei campi elettromagnetici. La prima operazione consiste nello stabilire una suddivisione del modello in porzioni che sia il più possibile generale e che permetta di rappresentare le posture di interesse senza introdurre un'eccessiva e non necessaria frammentazione. Un esempio di suddivisione è già stato illustrato in figura 3.

In base alla postura che si vuole modellare, si decide quindi quali porzioni sono soggette ad articolazione, quali vengono ruotate o traslate rigidamente e quali vengono eventualmente lasciate

ferme. Si eseguono quindi le elaborazioni separatamente su ogni porzione ed, in particolare, si calcolano le coordinate dei voxel appartenenti alle porzioni di modello articolate; si procede quindi al ricampionamento, laddove richiesto: in genere è necessario ricampionare sia le porzioni deformate, sia quelle ruotate o traslate.

Infine si ricompongono le porzioni di modello elaborate, a formare il modello articolato nella postura desiderata. In figura 11 e figura 12 sono rappresentati i risultati dell'articolazione del modello di riferimento in due posture tipiche negli ambienti di lavoro. Nelle figure vengono indicate le operazioni eseguite sulle porzioni elaborate.

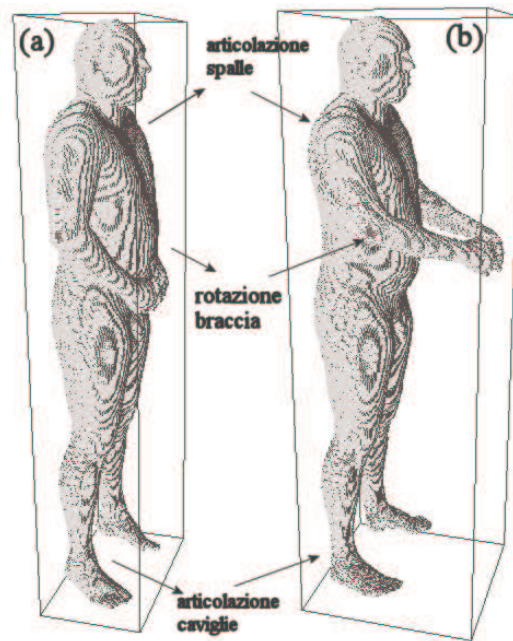


figura 11: (a) modello a riposo, (b) in postura eretta con braccia articolate.

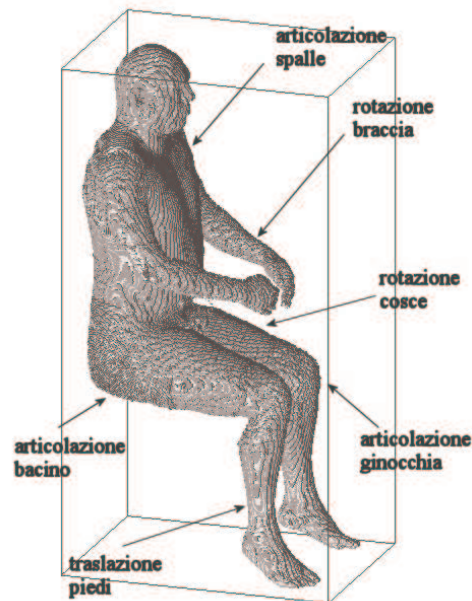


figura 12: modello in postura seduta.

2.4 SVILUPPO DI UNA APPLICAZIONE PER LA VISUALIZZAZIONE 3D

Per la visualizzazione tridimensionale dei modelli descritti nel seguito si è scelto la tecnologia OpenGL, uno *standard* molto affermato che è stato implementato sia in ambiente Windows che Unix. Oltre a non vincolare la scelta del sistema operativo, la libreria OpenGL demanda la maggior parte delle operazioni puramente grafiche all'hardware dedicato (processore grafico e relativa memoria) riducendo il carico di lavoro per le risorse di sistema. Questo requisito è fondamentale visto che i modelli dell'organismo occupano molta memoria (fino a 350 Mbyte per il modello a 1 mm) e necessitano quindi di molte risorse per essere gestiti. Si riportano di seguito le caratteristiche fondamentali delle librerie utilizzate.

2.4.1 Le librerie OpenGL

La libreria grafica OpenGL rappresenta una interfaccia software verso una varietà estremamente eterogenea di dispositivi grafici. L'interfaccia consiste in un insieme di procedure e funzioni che permettono al programmatore di specificare gli oggetti e le operazioni coinvolte nella produzione di immagini grafiche in alta qualità, specialmente per immagini a colori di oggetti tridimensionali.

Per poter utilizzare OpenGL ed eseguire le chiamate alle funzioni che permettono di disegnare i vari oggetti sulla cosiddetta scena, come ad esempio punti, linee, poligoni, e immagini bitmap, è necessario che nel hardware grafico sia presente un framebuffer. Il framebuffer è una matrice bidimensionale in cui vengono memorizzati i pixel dello schermo prima di essere visualizzati, ed esistono un insieme di funzioni dedicate al suo controllo.

Dal punto di vista del programmatore, OpenGL si presenta come un insieme di comandi che permettono di specificare oggetti geometrici in due o tre dimensioni, insieme ad altri che consentono il controllo di come questi oggetti subiranno l'operazione di render all'interno del framebuffer. OpenGL mantiene un insieme di informazioni di stato che influenza il modo in cui gli oggetti vengono visualizzati, ed esiste una serie di chiamate che permettono di variare tali stati o di conoscerne l'attuale valore.

OpenGL fa in modo che la maggior parte delle operazioni relative alla grafica venga eseguita dal processore ad essa dedicato, sgravando la CPU principale per permetterle così di svolgere altri compiti e migliorare la prestazione globale del sistema. Questo approccio sposta il peso della grafica dal processore principale al chip grafico rendendo possibile aumentare le prestazioni nella visualizzazione di immagini e animazioni, non incrementando la potenza del processore di sistema ma operando solo sul sottosistema video.

OpenGL si occupa esclusivamente del rendering all'interno del framebuffer dell'immagine o dell'animazione creata. Non esiste nessun supporto per le periferiche generalmente associate al hardware grafico, come ad esempio il mouse o la tastiera, quindi la gestione di tutti i dispositivi di input deve essere fatta in maniera autonoma dal programmatore dell'applicazione.

OpenGL fornisce un controllo diretto su tutte le operazioni fondamentali per la grafica 2D e 3D, in quanto permette di specificare i parametri delle matrici di trasformazione, i coefficienti delle equazioni di illuminazione, i metodi di antialiasing e le operazioni di aggiornamento dei pixel dello schermo. Non mette invece a disposizione mezzi per descrivere o modellare oggetti geometrici complessi : in altre parole OpenGL fornisce i meccanismi per descrivere come eseguire il rendering di un oggetto geometricamente complesso, ma non come descrivere la complessità dell'oggetto stesso.

Il modello dell'architettura di OpenGL è di tipo client-server, dove il programma utente (client) invia dei comandi che vengono ricevuti e processati da OpenGL (server). Il server può essere sia in esecuzione sulla macchina in cui è presente il client, sia su di una macchina remota, per cui si può dire che il sistema è "network-transparent" ovvero trasparente all'uso in rete.

2.4.2 *L'applicazione per la visualizzazione*

Le librerie OpenGL sono disponibili per molte piattaforme, tuttavia devono essere integrate in applicazioni che permettano di gestire gli input dell'utente attraverso il mouse e la tastiera. Tali applicazioni dipendono necessariamente dal sistema operativo utilizzato. Per vari motivi si è scelto di sviluppare i programmi per la visualizzazione su piattaforma Windows. Uno di questi motivi era consisteva nel fatto che si possedevano già le competenze per affrontare lo sviluppo di interfacce grafiche in C++ su piattaforma Windows. Inoltre, anche nell'ottica di una eventuale distribuzione del software, la scelta di Windows garantisce al momento una maggiore diffusione e semplicità di utilizzo. Tuttavia si è fatto in modo di separare le parti di codice più dipendenti dalla piattaforma, cioè l'interfaccia utente (sviluppata utilizzando le librerie Microsoft Foundation Class, MFC), da quelle più portabili, cioè le chiamate dirette a Open GL. Tale separazione è stata realizzata mediante la progettazione di una gerarchia di classi.

Una analisi dettagliata del codice sarebbe fuori luogo in questo contesto e si ritiene pertanto di non dilungarsi ulteriormente sui dettagli di implementazione. I risultati ottenuti sono apprezzabili nelle viste tridimensionali dei modelli di organismo riprodotte nella tesi, sia in questo capitolo, sia in quelli successivi.

3 METODI DI CALCOLO

In questo capitolo si descrive lo studio dei metodi di calcolo secondo un percorso che si articola come segue: inizialmente si definiranno in modo qualitativo le condizioni che permettono di applicare rigorosamente l'approssimazione quasi statica. Quindi, si descriveranno i metodi numerici utilizzati ed in particolare si definiranno sia le equazioni differenziali su cui questi si basano, sia il procedimento con cui queste sono ricavate a partire dalle equazioni di Maxwell. Infine, una volta definite le equazioni differenziali di base, si affronterà la loro discretizzazione, cioè il processo mediante il quale le equazioni differenziali o integrali sono trasformate in equazioni algebriche.

3.1 L'APPROSSIMAZIONE QUASI-STATICA

Come già esposto nel primo capitolo, questa tesi riguarda applicazioni in regime cosiddetto “*quasi-statico*”. Si è già parlato anche del fatto che per poter applicare l'approssimazione quasi statica si devono verificare tre precise condizioni. In questo paragrafo si definiscono tali condizioni in modo più analitico, fornendone una definizione quantitativa.

3.1.1 *Condizione n. 1 sulla lunghezza d'onda in aria e definizione problema elettrico e magnetico*

Tra le tre condizioni, la prima è quella che da luogo al vincolo meno stringente. Si tratta del presupposto fondamentale per l'applicabilità dell'approssimazione quasi statica e spesso è il solo ad essere ricordato.

Secondo la prima delle tre condizioni, la lunghezza d'onda in aria deve essere molto maggiore delle dimensioni del teatro espositivo. In altre parole le dimensioni dell'oggetto esposto, delle sorgenti e le relative mutue distanze devono essere molto più piccole della lunghezza d'onda in aria.

Questa condizione permette di *non considerare gli effetti di propagazione* e quindi di determinare i campi generati dalle sorgenti, con le tecniche della magnetostatica e della elettrostatica.

Sono così definiti due problemi indipendenti: il **problema magnetico**, in cui si prende in considerazione la sola esposizione al campo magnetico ed il **problema elettrico** in cui si prende invece in considerazione l'esposizione al campo elettrico.

3.1.2 *Condizione n. 2 sulla profondità di penetrazione*

La seconda condizione che deve essere verificata è relativa alla profondità di penetrazione, come definita in appendice A, che deve essere più grande o al limite paragonabile rispetto alle massime dimensioni dell'organismo esposto. Ciò è sufficiente per affermare che il campo magnetico impresso non risulta significativamente perturbato dalle correnti indotte.

In generale infatti il campo magnetico generato dalla densità di corrente indotta causa una perturbazione al campo elettrico interno che è responsabile dell'effetto pelle, cioè dell'addensamento della corrente stessa sulla superficie del conduttore.

Se tale fenomeno può essere considerato trascurabile allora si potrà considerare come trascurabile anche il campo magnetico generato dalle correnti indotte.

Come si può notare in figura 13, la profondità di penetrazione 1 MHz per il muscolo, uno tra i tessuti più significativi, è al di sotto del metro e dunque a questa frequenza si è al limite della applicabilità, considerando le dimensioni massime del tronco di un adulto.

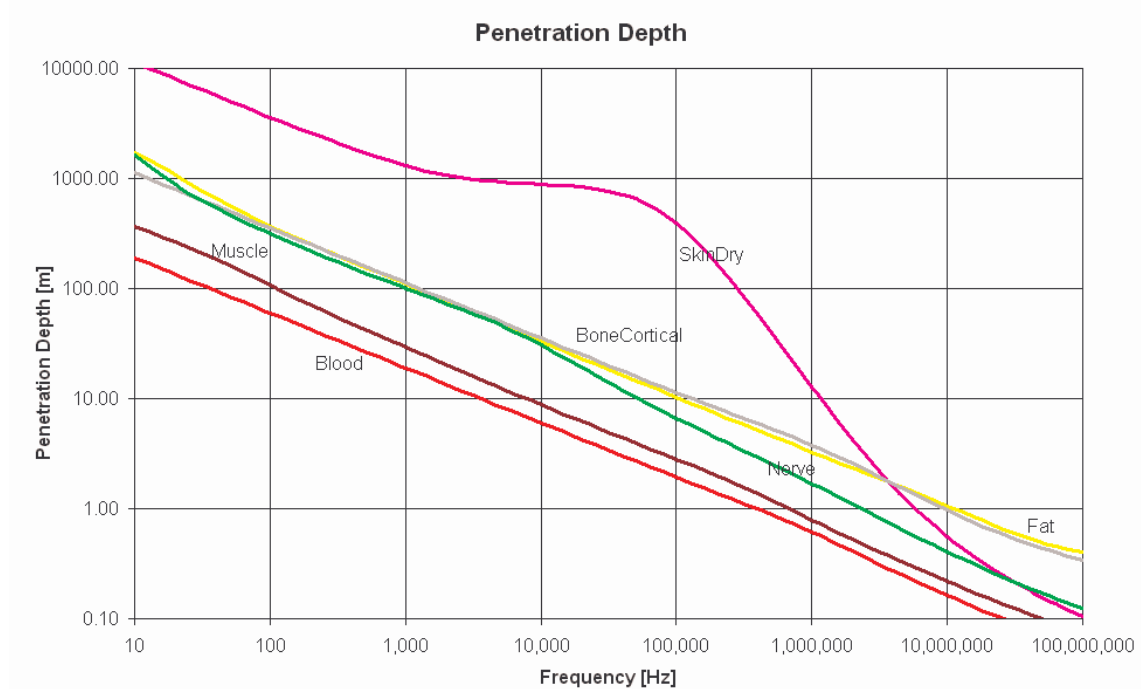


figura 13: profondità di penetrazione per alcuni tessuti tra 10 Hz e 100 MHz

3.1.3 Condizione n. 3 sulla tangente di perdita: problema elettrico esterno ed interno.

La terza condizione che deve essere verificata affinché si possano sfruttare a pieno tutte le semplificazioni della quasi-statica è quella per cui l'organismo esposto sia assimilabile ad un buon conduttore alle frequenze di interesse. In pratica si deve verificare che $\sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon$ o, analogamente, che la tangente di perdita γ del materiale sia molto maggiore dell'unità (appendice A).

Qualora l'organismo esposto possa essere assimilato ad un buon conduttore, allora, potrà essere considerato anche equipotenziale (nel senso di potenziale elettrostatico) e, nel caso in cui sia esposto ad un campo elettrico esterno, la carica libera presente al suo interno tenderà ad addensarsi istantaneamente sulla sua superficie. Con semplici passaggi si può infatti dimostrare che la costante di tempo con cui la carica libera si addensa sulla superficie vale $\tau = \epsilon \epsilon_0 / \sigma$ ed è dunque tanto più piccola quanto più la corrente di conduzione prevale su quella di spostamento.

In particolare il campo elettrico induce per via elettrostatica sul soggetto esposto una carica superficiale, in modo che la distribuzione di potenziale generata dalla sorgente e dalla carica superficiale indotta stessa, risulti *in prima approssimazione* costante all'interno del corpo stesso.

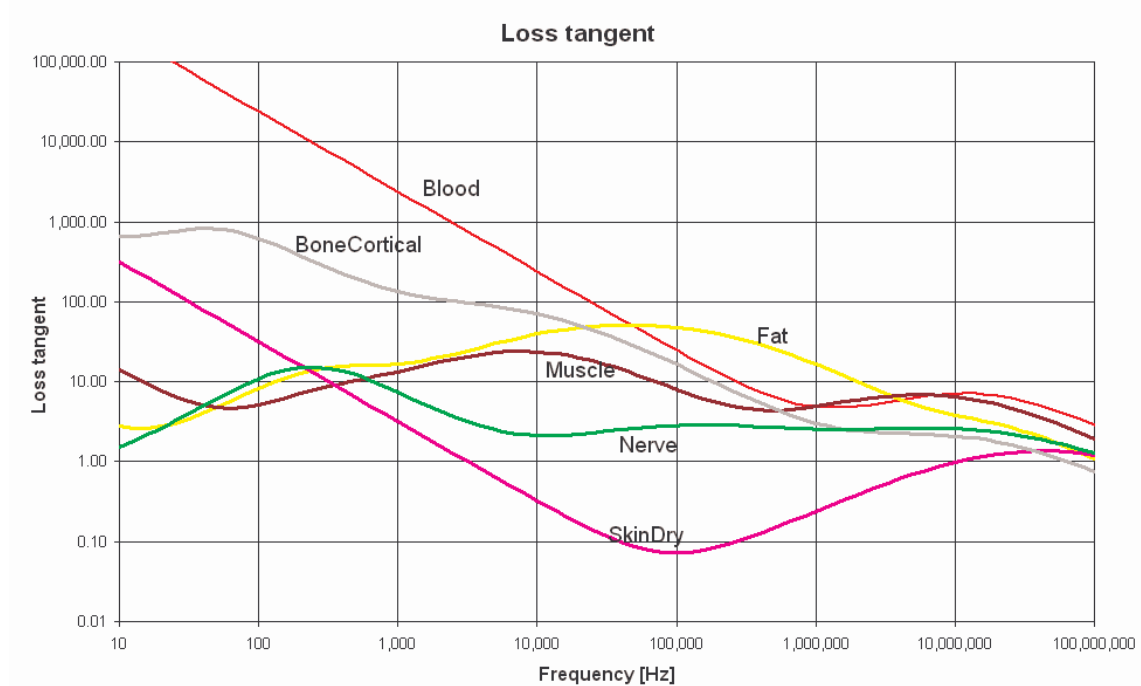


figura 14: tangente di perdita di alcuni tessuti tra 10 Hz e 100 MHz

Si ribadisce che si tratta di una approssimazione visto che l'esposizione al campo elettrico è in grado di indurre una densità di corrente, e ciò implica che in realtà all'interno del corpo vi sarà un campo elettrico che la sostiene. Tale densità di corrente, può essere calcolata considerando come termine forzante la variazione di carica superficiale indotta dal campo elettrico, una volta che quest'ultima sia stata determinata risolvendo il problema elettrostatico del corpo conduttore immerso nel campo elettrico generato dalle sorgenti.

Nel caso del campo elettrico si devono quindi risolvere in serie, due problemi distinti:

- **il problema esterno:** in cui si suppone l'organismo esposto come un conduttore perfetto (e quindi equipotenziale) e si determina la carica superficiale indotta dal campo elettrico generato dalle sorgenti (si tratta di un problema statico in cui non compaiono le derivate rispetto al tempo).
- **il problema interno:** in cui si introducono nuovamente le derivate temporali e si determina la densità di corrente interna all'organismo sostenuta dalla variazione di carica superficiale calcolata risolvendo il problema esterno.

Il fatto di dover risolvere due problemi piuttosto che uno solo rappresenta indubbiamente una complicazione, d'altra parte, il poter considerare separatamente ciò che avviene all'esterno del

corpo da ciò che avviene all'interno porta grandi vantaggi. Il più rilevante è forse quello di dover rappresentare ampie porzioni di spazio solo per risolvere il problema statico esterno mentre per la soluzione del problema interno ci si può limitare a rappresentare la più piccola porzione di spazio che confina l'organismo esposto.

Come si può notare in figura 14, per la maggior parte dei tessuti la tangente di perdita è maggiore di 10 per frequenze inferiori a 100 kHz e vale circa 1 intorno ai 100 MHz. In questo caso 100 kHz appare come un buon candidato per il limite al di sotto del quale è applicabile in modo rigoroso l'approssimazione quasi statica. È da notare che nel caso della condizione n.2 si era stabilito un limite pari a 1 MHz.

3.2 METODI PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ELETTRICO ESTERNO

Nel caso del problema esterno, cioè quello che ha per incognita la densità di carica η sulla superficie del modello, sono state prese in considerazione le due alternative descritte nel seguito.

3.2.1 Soluzione dell'equazione di Laplace per il potenziale in aria

Il primo approccio preso in considerazione è la soluzione dell'equazione di Laplace per il potenziale elettrostatico ϕ all'esterno del soggetto esposto [27]:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.1)$$

In questo caso le condizioni al contorno sono i valori di potenziale su tutti gli oggetti conduttori presenti nel teatro espositivo, sull'eventuale piano di terra e sull'organismo esposto. Il teatro espositivo si deve estendere fino a regioni in cui si possa considerare trascurabile la perturbazione al campo elettrico generata dagli oggetti esposti. Così facendo il potenziale ai bordi del teatro espositivo può essere fissato come se fosse influenzato dalle sole sorgenti.

Una volta noto il potenziale ϕ all'esterno del corpo, la densità di carica superficiale η si ottiene applicando la legge di Gauss all'interfaccia aria-organismo:

$$\eta = -\epsilon_0 \nabla \phi \cdot \hat{n} \quad (3.2)$$

dove $\hat{n}$ è la normale uscente dalla superficie del modello dell'organismo.

determinazione del potenziale ϕ_B

Nel caso in cui il soggetto esposto non sia connesso a terra si deve tenere conto che il valore di potenziale ϕ_B su di esso non è noto. Se N è il numero di celle considerate, in questo caso vi sono N equazioni in $N+1$ incognite. L'equazione aggiuntiva necessaria è ottenuta in base alla legge di Ohm:

$$\phi_B = \left[j\omega \iint_S (\eta dS) \right] \cdot R_{eq} \quad (3.3)$$

dove R_{eq} è la parte resistiva dell'impedenza equivalente con cui si rappresenta il contatto tra soggetto esposto ed il terreno e dove η è la densità superficiale di *carica libera* presente sul soggetto esposto.

In generale, la R_{eq} deve essere stimata, ma assumono particolare rilevanza i due casi in cui $R_{eq}=0$ e $R_{eq}=\infty$.

Il caso in cui $R_{eq}=0$, cioè di soggetto connesso a terra, è banale in quanto, la (3.3) diventa $\phi_B=0$.

Nel caso in cui $R_{eq}=\infty$, cioè di soggetto perfettamente isolato da terra, dato che ϕ_B deve assumere comunque un valore finito, dalla (3.3) consegue che, necessariamente $\iint_S (\eta dS) = 0$, e tenendo conto della (3.2) si ha:

$$\iint_S (-\nabla \phi) \cdot d\hat{S} = 0 \quad (3.4)$$

che è l'equazione aggiuntiva da considerare nel caso di soggetto perfettamente isolato da terra.

3.2.2 Soluzione dell'equazione integrale della densità di carica con il metodo dei momenti

Il secondo approccio preso in considerazione per la determinazione della densità di carica è quello dell'applicazione del metodo dei momenti alla equazione integrale della densità di carica [28],[29]:

$$\begin{aligned} \phi_B &= \phi_s(Q) + \phi_i(Q) \\ \phi_s(Q) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\eta(P)}{|Q-P|} dS \end{aligned} \quad (3.5)$$

In questo caso Q è un generico punto all'interno del corpo e P è un punto che giace sulla sua superficie S . Il potenziale ϕ_B (in genere incognito ma costante all'interno di tutto il corpo) è espresso come somma del potenziale ϕ_s mantenuto dalla densità di carica superficiale incognita η (sulla superficie S), e del potenziale ϕ_i mantenuto dalle sorgenti di campo elettrico, di cui si suppone sia nota l'espressione. La (3.3) è l'equazione aggiuntiva necessaria nel caso in cui ϕ_B non sia noto.

3.2.3 *Scelta del metodo di soluzione del problema esterno*

Dopo alcune prove di implementazione, si è preferito il metodo che comporta la soluzione dell'equazione di Laplace.

I motivi sono sostanzialmente legati alle dimensioni del problema. Infatti, come riportato nel paragrafo 2.1, il modello di organismo utilizzato ha circa 3 milioni di celle interne di cui più di 200.000 sono celle superficiali. Il metodo dei momenti modella in linea di principio il mutuo accoppiamento capacitivo di ogni singola cella con tutte le altre. Ne consegue che il problema è rappresentato da una matrice di $NS \times NS$ elementi dove NS è il numero delle celle superficiali. Anche sfruttando la simmetria della matrice e cercando di filtrare gli accoppiamenti meno significativi (quelli tra celle lontane) è risultato difficile ridurre le dimensioni della matrice a dimensioni accettabili (con NS pari a 2×10^5 la matrice completa avrebbe 40 miliardi di elementi).

Nel caso della soluzione dell'equazione di Laplace, invece, le risorse di memoria necessarie sono proporzionali al numero di celle. Va detto che in questo caso il numero di celle considerate è molto maggiore di quello delle sole superficiali e che inoltre, per poter imporre correttamente le condizioni al contorno, è necessario in genere rappresentare una porzione di spazio più ampia intorno al modello dell'organismo. Anche considerando questo fatto però, la riduzione delle risorse di memoria necessarie per la soluzione del problema, ai valori tipici di un moderno personal computer è da subito apparsa più praticabile rispetto al caso del metodo dei momenti.

3.3 *METODI PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA INTERNO*

Nel momento in cui si è indagato quale fosse il metodo più adatto tra quelli presentati in letteratura, si avevano in mente alcune caratteristiche a cui prestare particolare attenzione:

1. l'applicabilità del metodo a problemi tridimensionali disomogenei;
2. la richiesta di risorse, in relazione alle grandi dimensioni del problema;
3. l'adattabilità dei metodi a trattare problemi in cui i modelli di organismo a disposizione fossero costituiti da celle cubiche.
4. nel caso del problema interno si desiderava un metodo che fosse utilizzabile per risolvere sia il problema magnetico, sia il problema elettrico.

Come nel caso del problema elettrico esterno, anche nel caso del problema interno sono stati presi in considerazione i metodi più popolari presentati in letteratura.

3.3.1 Problema interno: Impedante Network Method

Secondo il metodo denominato “Impedante Network Method” (da [30] a [38]) ciascuna cella è rappresentata con tre impedenze, poste su tre dei suoi spigoli, in modo che questi condividano un vertice. Il valore di ogni impedenza è ottenuto effettuando una media delle conducibilità delle quattro celle che condividono lo spigolo considerato. L’organismo esposto risulta così rappresentato da una griglia tridimensionale di impedenze e la corrente che scorre in ciascuna di esse è calcolata utilizzando gli strumenti di analisi di circuiti lineari. Ci si riconduce infatti ad un sistema lineare di equazioni di Kirchoff per la corrente in ciascuna maglia del circuito.

Nel caso di esposizione a solo campo magnetico la variazione nel tempo del flusso dell’induzione magnetica concatenato a ciascuna spira induce in essa una differenza di potenziale rappresentata come generatore di tensione. L’induzione magnetica considerata è quella generata dalle sole sorgenti, essendo trascurabile quella generata dalle correnti indotte (paragrafo 3.1.2).

Nel caso di esposizione al campo elettrico, la variazione di carica superficiale, determinata risolvendo il relativo problema esterno, è rappresentata come un generatore di corrente posto in corrispondenza delle celle superficiali.

3.3.2 Problema interno: Current Vector Potential

L’equazione di base del metodo denominato Current Vector Potential [39] si ottiene combinando l’equazione del rotore del campo magnetico $\vec{H}_J$ generato dalle correnti indotte con l’equazione che lega il rotore del campo elettrico interno $\vec{E}_i$ e la variazione nel tempo dell’induzione magnetica $\vec{B}_s$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H}_J = \vec{J} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E}_i \\ \nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_s}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{H}_J \right) = -\frac{\partial \vec{B}_s}{\partial t} \quad (3.6)$$

Anche in questo caso si è considerato l’induzione magnetica $\vec{B}_s$ generata dalle sole sorgenti, essendo trascurabile rispetto ad essa l’induzione magnetica $\vec{B}_J$ generata dalle correnti indotte.

La (3.6) è una equazione vettoriale e solo nel caso in cui il campo magnetico impresso sia polarizzato linearmente, è possibile trasformarla in una singola equazione scalare che ha per

incognita l'ampiezza di $\vec{H}_j$, che risulta in questo caso polarizzato linearmente come il campo generato dalle sorgenti.

In letteratura non si è trovato alcun riferimento ad applicazioni di questo metodo al caso di esposizione a campo elettrico. Probabilmente ciò è dovuto al fatto che non è facile inserire nella (3.6) la condizione al contorno sulla carica superficiale indotta dal campo elettrico.

3.3.3 Il metodo Scalar Potential Finite Difference

Il metodo Scalar Potential Finite Difference [40][41][42][43][44][45][46][47] (SPFD nel seguito) è apparso da subito come candidato ideale in quanto rispondente in pieno ai requisiti individuati a supporto della scelta. Se ne fornisce di seguito una descrizione dettagliata, necessaria come base per il capitolo seguente, nel quale si descriveranno i particolari dell'implementazione, visto che tale metodo è stato poi effettivamente scelto come riferimento.

L'equazione di base può essere scritta in forma generale, cioè che prescinde dall'approssimazione quasi statica. Per fare ciò si parte dalla legge del rotore del campo elettrico in un generico punto interno all'organismo:

$$\nabla \times \vec{E}_i = -j\omega \vec{B}_i = -j\omega \nabla \times \vec{A}_i \quad (3.7)$$

In questa equazione $\vec{E}_i$ e $\vec{B}_i$ sono rispettivamente il campo elettrico e l'induzione magnetica interna all'organismo esposto. L'induzione magnetica viene poi espressa come il rotore di un potenziale vettoriale $\vec{A}_i$.

La (3.7) può essere scritta come segue:

$$\nabla \times (\vec{E}_i + j\omega \vec{A}_i) = 0 \quad (3.8)$$

Essendo il vettore $(\vec{E}_i + j\omega \vec{A}_i)$ irrotazionale, può essere espresso in termini di un potenziale scalare:

$$\vec{E}_i + j\omega \vec{A}_i = -\nabla \phi \quad (3.9)$$

ne consegue che il campo elettrico interno $\vec{E}_i$ può essere espresso in termini di un potenziale scalare e di un potenziale vettore:

$$\vec{E}_i = -\nabla \phi - j\omega \vec{A}_i \quad (3.10)$$

Sostituendo la (3.10) nella espressione del rotore del campo magnetico si ha che:

$$\nabla \times \vec{H}_i = (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}_i = (\sigma + j\omega \epsilon) (-\nabla \phi - j\omega \vec{A}_i) \quad (3.11)$$

Si applica quindi l'operatore divergenza a entrambi i membri della (3.11):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}_i) = 0 = \nabla \cdot ((\sigma + j\omega\epsilon)(-\nabla\phi - j\omega\vec{A}_i)) \quad (3.12)$$

Considerando che la divergenza di un rotore è pari a zero, si ottiene l'equazione di base del metodo SPFD nella sua forma più generale:

$$\nabla \cdot ((\sigma + j\omega\epsilon)(-\nabla\phi - j\omega\vec{A}_i)) = 0 \quad (3.13)$$

In questa forma l'equazione non è direttamente risolvibile; si tratta infatti di una singola equazione scalare in cui compaiono quattro incognite cioè il potenziale scalare ϕ e le tre componenti del potenziale vettore $\vec{A}_i$.

In regime quasi statico ci viene in aiuto la condizione n. 2 sulla profondità di penetrazione; si è visto che, all'incirca al di sotto di 1 MHz la profondità di penetrazione del campo magnetico nei tessuti biologici più significativi è paragonabile o superiore alle dimensioni dei principali distretti in cui è suddivisibile l'organismo esposto (testa, tronco, arti..). Si è anche visto che in tali condizioni il campo magnetico interno è con buona approssimazione pari a quello generato dalle sole sorgenti. Rispetto a quest'ultimo infatti risulta trascurabile il contributo generato dalle correnti indotte. Nella (3.13) si può porre quindi:

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \nabla \times \vec{A}_i \approx \vec{B}_s = \nabla \times \vec{A}_s \\ \vec{A}_i &\approx \vec{A}_s \end{aligned} \quad (3.14)$$

E quindi si ha che:

$$\nabla \cdot ((\sigma + j\omega\epsilon)(-\nabla\phi - j\omega\vec{A}_s)) = 0 \quad (3.15)$$

La (3.15) è una equazione scalare con coefficienti complessi che ha per incognita il potenziale scalare elettrostatico ϕ .

Nel caso in cui i tessuti biologici possano essere assimilati a buoni conduttori ($\sigma \gg \omega\epsilon_0\epsilon$) la (3.15) può essere ulteriormente semplificata. Come si è visto nel paragrafo 3.1.3 ciò può essere assunto vero a frequenze inferiori a 100 kHz:

$$\nabla \cdot (\sigma(-\nabla\phi - j\omega\vec{A}_s)) = 0 \quad (3.16)$$

La (3.16) è l'equazione di base del metodo SPFD come più spesso viene riportata in letteratura; nel seguito della tesi ci riferiremo a questa espressione.

L'espressione integrale della (3.16) assume la seguente forma:

$$\oiint_C [\sigma(-\nabla\phi - j\omega\vec{A})] d\vec{C} = 0 \quad (3.17)$$

dove C è una generica superficie chiusa il cui elemento infinitesimo è rappresentato da un vettore diretto ortogonalmente ad essa, con verso uscente.

Può destare qualche dubbio il fatto che per la descrizione del campo elettrico interno all'organismo generato da un campo magnetico esterno venga utilizzato un potenziale scalare di tipo "elettrostatico".

Se non si introducesse il potenziale scalare ϕ si avrebbe che:

$$\vec{E}_{interno} = -j\omega \cdot \vec{A}_{sorgenti} \quad (3.18)$$

Consideriamo adesso la situazione rappresentata in figura 15: in cui due celle attigue sono caratterizzate da differenti conducibilità. Applicando la continuità della corrente all'interfaccia tra le due celle nel caso di buoni conduttori ($\sigma \gg \omega\epsilon$), si ha che $\sigma_1 \vec{E}_1 = \sigma_2 \vec{E}_2$. Se il campo elettrico fosse esprimibile in termini del solo potenziale

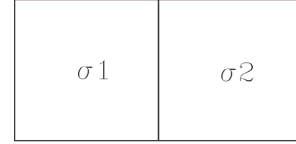


figura 15

vettore esterno allora si conserverebbe al passaggio attraverso l'interfaccia e si arriverebbe alla conclusione assurda che $\sigma_1 = \sigma_2$. Il termine $-\nabla\phi$ è dunque necessario per tenere conto della disomogeneità dell'organismo in termini di conducibilità.

3.3.4 Condizioni al contorno

Si può osservare che la (3.16) è una particolare forma della equazione di continuità della corrente. In particolare, visto che $\vec{E}_i \approx -\nabla\phi - j\omega\vec{A}_s$ si ha che può essere riformulata come segue:

$$\nabla \cdot (\sigma(-\nabla\phi - j\omega\vec{A}_s)) = \nabla \cdot (\sigma\vec{E}_i) = \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.19)$$

Da ciò consegue che nel caso di esposizione al solo campo magnetico, in cui non c'è carica libera, non è necessario imporre alcuna condizione al contorno supplementare.

La (3.19), come anche la (3.16) e la (3.17) devono invece essere modificate nel caso di esposizione al campo elettrico e di punti appartenenti alla superficie dell'organismo esposto. In tal caso, e comunque solo sulla superficie, si deve tenere conto della variazione temporale della densità superficiale di carica η indotta dal campo elettrico e la (3.16) e la (3.17) si modificano come segue:

$$\nabla \cdot (\sigma(-\nabla\phi - j\omega\vec{A}_s)) = -j\omega\eta \quad (3.20)$$

$$\oint_C [\sigma(-\nabla\phi - j\omega\vec{A}_s)] d\vec{C} = \iint_{\Pi} -j\omega\eta d\Pi \quad (3.21)$$

dove, nel caso della (3.21), Π è la porzione di superficie dell'organismo contenuta nel volume racchiuso dalla superficie C .

Risolvere il problema interno significa calcolare la distribuzione del potenziale ϕ . Una volta che questa sia nota, la densità di corrente si determina utilizzando l'espressione (3.10) per il campo elettrico e si ottiene:

$$J = \sigma \vec{E}_i = \sigma (-\nabla \phi - j\omega \vec{A}_s) \quad (3.22)$$

3.4 LA DISCRETIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI

Una volta definite le equazioni differenziali o integrali che stanno alla base dei metodi di calcolo, per poterle utilizzare nell'ambito di un programma eseguibile da un calcolatore elettronico è necessario trasformarle in equazioni algebriche o, come si dice in gergo tecnico, *discretizzarle*. Si è già parlato della rappresentazione digitale dell'organismo umano ed in particolare si è visto che il modello scelto come riferimento è caratterizzato da celle cubiche. In problemi che interessano tali tipi di strutture la scelta più immediata e diretta è quella di utilizzare la tecnica di discretizzazione delle *differenze finite*, secondo la quale le derivate nello spazio sono sostituite con i relativi rapporti incrementali.

Per non appesantire troppo la trattazione, nel seguito illustreremo il processo di discretizzazione in due dimensioni e solo in seguito forniremo l'estensione delle espressioni fondamentali al caso tridimensionale. Il primo metodo di cui illustreremo la discretizzazione è quello del problema interno nel caso di esposizione a solo campo magnetico. Per questo problema, che è stato il primo ad essere affrontato e risolto, sono state studiate più alternative alla discretizzazione. Una volta individuato l'approccio scelto per lo sviluppo dei programmi, mostreremo come questo sia stato applicato al caso del problema esterno e a quello del problema interno in presenza di carica superficiale.

3.4.1 Discretizzazione in 2D dell'equazione SPFD per la soluzione del problema interno nel caso di solo campo magnetico impresso

La discretizzazione della equazione di base del metodo SPFD può essere effettuata sia a partire dalla forma differenziale (3.16) sia da quella integrale (3.17). Inoltre si possono utilizzare diversi schemi di discretizzazione a seconda, ad esempio, che si considerino i potenziali scalari applicati nei vertici oppure nei centri delle celle in cui il modello di organismo viene segmentato.

La discretizzazione della forma integrale è senza dubbio meno impegnativa da ricavare ma, per la comprensione del problema, è comunque utile analizzare tutti i casi descritti.

3.4.2 Potenziali scalari applicati nei vertici delle celle e discretizzazione della forma integrale

Si consideri il grigliato in figura 16 ed in particolare le quattro celle i cui centri sono indicati dai punti con indici i, j che individuano la posizione della cella nel grigliato. Utilizzando un sottosistema di indici che prende come riferimento un vertice del grigliato per cui si assume indice 0 ed assegna ai vertici adiacenti gli indici da 1 a 4 come in figura, l'approccio alla discretizzazione utilizzato da Dimbylow [42]

e assume che:

- il potenziale scalare incognito venga applicato ai vertici di ciascuna cella n_i ;
- il potenziale vettore esterno venga applicato a metà del lato delle celle (punti indicati con m_i) e sia parallelo al lato della cella considerato (e quindi ortogonale al contorno);
- ogni cella i, j sia caratterizzata dalla relativa conducibilità

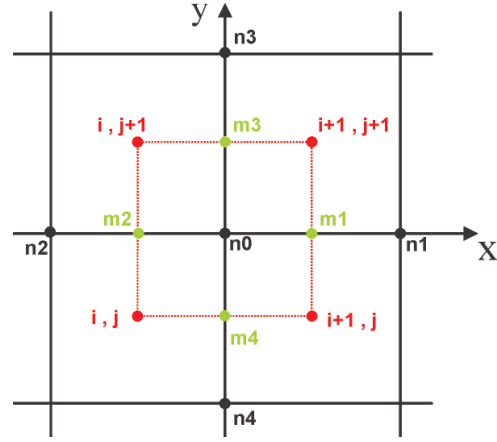


figura 16: schema di discretizzazione con potenziale ai vertici

Nella (3.17) si considera come superficie chiusa C il contorno tratteggiato in figura 16.

Come si è già detto il potenziale vettore esterno è applicato nei punti m_i e si considera la componente ortogonale al contorno. Visto che ogni lato del contorno attraversa due celle, caratterizzate in genere da diverse conducibilità, in m_i si applica la conducibilità media delle celle che contengono il lato del contorno considerato:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{m1} &= \frac{\sigma_{i+1,j+1} + \sigma_{i+1,j}}{2} & \bar{\sigma}_{m3} &= \frac{\sigma_{i+1,j+1} + \sigma_{i,j+1}}{2} \\ \bar{\sigma}_{m2} &= \frac{\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j}}{2} & \bar{\sigma}_{m4} &= \frac{\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}}{2}\end{aligned}\quad (3.23)$$

Ciò che si ottiene utilizzando il procedimento descritto è la seguente espressione

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{m1} \frac{\Phi_{n1} - \Phi_{n0}}{lc} + \bar{\sigma}_{m2} \frac{\Phi_{n2} - \Phi_{n0}}{lc} + \bar{\sigma}_{m3} \frac{\Phi_{n3} - \Phi_{n0}}{lc} + \bar{\sigma}_{m4} \frac{\Phi_{n4} - \Phi_{n0}}{lc} = \\ = -j\omega(\bar{\sigma}_{m1} A_{m1} - \bar{\sigma}_{m2} A_{m2} + \bar{\sigma}_{m3} A_{m3} - \bar{\sigma}_{m4} A_{m4})\end{aligned}\quad (3.24)$$

e dopo le opportune semplificazioni:

$$\Phi_{n0} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^4 \bar{\sigma}_{mi}} \right) \cdot \sum_{i=1}^4 \left\{ \bar{\sigma}_{mi} [\Phi_{ni} - (-1)^i j \omega l_c A_{mi}] \right\} \quad (3.25)$$

o analogamente

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{m1} \cdot \Phi_{n1} + \bar{\sigma}_{m2} \cdot \Phi_{n2} + \bar{\sigma}_{m3} \cdot \Phi_{n3} + \bar{\sigma}_{m4} \cdot \Phi_{n4} - \left(\sum_{i=1}^4 \bar{\sigma}_{mi} \right) \cdot \Phi_{n0} = \\ = -j \omega \cdot l_c (\bar{\sigma}_{m1} A_{m1} - \bar{\sigma}_{m2} A_{m2} + \bar{\sigma}_{m3} A_{m3} - \bar{\sigma}_{m4} A_{m4}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.4.3 Potenziali scalari applicati nei vertici delle celle e discretizzazione della forma differenziale

Nel caso si parta dalla forma differenziale (3.16), questa deve essere opportunamente sviluppata utilizzando le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{i}_y \\ \nabla \cdot \vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \\ \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

La (3.16) può essere sviluppata come segue:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = -j \omega \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} A_x + \sigma \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} A_y + \sigma \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \quad (3.28)$$

La discretizzazione procede sostituendo le derivate con le relative differenze finite. In particolare riferendosi ad una generica funzione $f(x,y)$ si utilizzeranno le seguenti relazioni per le derivate prime e seconde:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{f(i+1, j) - f(i-1, j)}{2 \cdot lc} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2 \cdot lc} \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{f(i+1, j) + f(i-1, j) - 2f(i, j)}{lc^2} \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{f(i, j+1) + f(i, j-1) - 2f(i, j)}{lc^2} \quad (3.30)$$

Riferendosi alla figura 16, si considerano le conducibilità medie della (3.23) ed inoltre si definisce $\bar{\sigma}_0$:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j} + \sigma_{i+1,j+1} + \sigma_{i,j+1}}{4} = \frac{\bar{\sigma}_{m1} + \bar{\sigma}_{m2}}{2} = \frac{\bar{\sigma}_{m3} + \bar{\sigma}_{m4}}{2} \quad (3.31)$$

e tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{n0} &\approx \frac{\sigma_{m1} - \sigma_{m2}}{lc} & \left. \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right|_{n0} &\approx \frac{\sigma_{m3} - \sigma_{m4}}{lc} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{n0} &\approx \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2 \cdot lc} & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{n0} &\approx \frac{\Phi_3 - \Phi_4}{2 \cdot lc} \\ \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{n0} &\approx \frac{\Phi_1 + \Phi_2 - 2 \cdot \Phi_0}{lc} & \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right|_{n0} &\approx \frac{\Phi_3 + \Phi_4 - 2 \cdot \Phi_0}{lc} \\ \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{n0} &\approx \frac{A_{m1} - A_{m2}}{lc} & \left. \frac{\partial A_y}{\partial x} \right|_{n0} &\approx \frac{A_{m3} - A_{m4}}{lc} \\ A_x|_{n0} &\approx \frac{A_{m1} + A_{m2}}{2} & A_y|_{n0} &\approx \frac{A_{m3} + A_{m4}}{2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sostituendo le precedenti espressioni nella (3.28) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_{m1} - \sigma_{m2}}{2 \cdot l_c} \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2 \cdot l_c} + \bar{\sigma}_0 \frac{\Phi_1 + \Phi_2 - 2 \cdot \Phi_0}{l_c^2} + \frac{\sigma_{m3} - \sigma_{m4}}{2 \cdot l_c} \cdot \frac{\Phi_3 - \Phi_4}{2 \cdot l_c} + \bar{\sigma}_0 \frac{\Phi_3 + \Phi_4 - 2 \cdot \Phi_0}{l_c^2} = \\ &= -j\omega \left(\frac{\sigma_{m1} - \sigma_{m2}}{2 \cdot l_c} \cdot \frac{A_{m1} + A_{m2}}{2} + \bar{\sigma}_0 \frac{A_{m1} - A_{m2}}{2 \cdot l_c} + \frac{\sigma_{m3} - \sigma_{m4}}{2 \cdot l_c} \cdot \frac{A_{m3} + A_{m4}}{2} + \bar{\sigma}_0 \frac{A_{m3} - A_{m4}}{2 \cdot l_c} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

e con semplici passaggi algebrici si ottiene nuovamente la (3.25).

3.4.4 Potenziali scalari applicati nei centri delle celle e discretizzazione della forma integrale

Passiamo adesso ad analizzare il secondo schema di discretizzazione, cioè quello in cui si considerano i potenziali scalari applicati al centro di ciascuna cella. Iniziamo con la discretizzazione della forma integrale (3.17), considerando come contorno quello della cella centrale, evidenziato in figura 17.

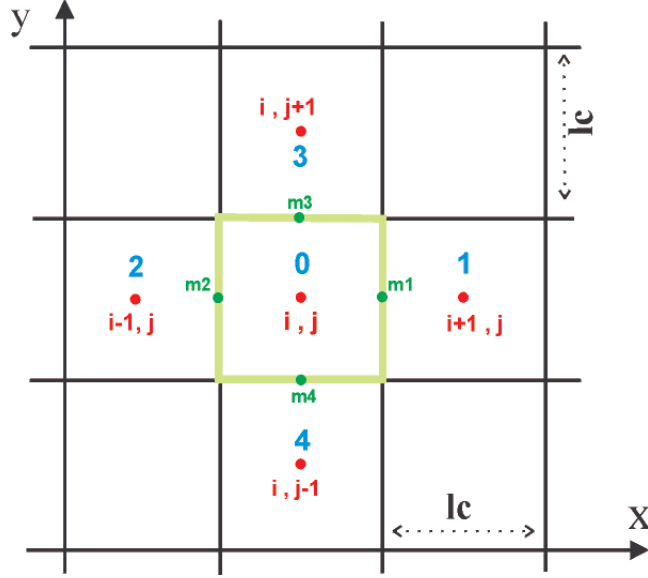


figura 17: contorno nello schema di discretizzazione con potenziale ai centri

E' necessario considerare il potenziale vettore nei punti m_i e la conducibilità media applicata nello stesso punto.

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} & \sigma_{m3} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_3}{2} \\ \sigma_{m2} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_2}{2} & \sigma_{m4} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_4}{2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Tenendo conto delle (3.34) si ottiene dunque

$$\sigma_{m1} \cdot \Phi_1 + \sigma_{m2} \cdot \Phi_2 + \sigma_{m3} \cdot \Phi_3 + \sigma_{m4} \cdot \Phi_4 - \left(\sum_{i=1}^4 \sigma_{mi} \right) \Phi_0 = -j\omega l_c \left(\sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \sigma_{mi} \cdot A_{mi} \right) \quad (3.35)$$

dove nelle precedenti A_{m1} e A_{m2} sono paralleli a x mentre A_{m3} e A_{m4} sono paralleli a y .

3.4.5 Potenziali scalari applicati nei centri delle celle e discretizzazione della forma integrale

Sviluppando la (3.28) secondo lo schema di figura 17 si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot l_c} \cdot \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2 \cdot l_c} + \sigma_0 \frac{\Phi_1 + \Phi_2 - 2 \cdot \Phi_0}{l_c^2} + \frac{\sigma_3 - \sigma_4}{2 \cdot l_c} \cdot \frac{\Phi_3 - \Phi_4}{2 \cdot l_c} + \sigma_0 \frac{\Phi_3 + \Phi_4 - 2 \cdot \Phi_0}{l_c^2} = \\ & = -j\omega \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot l_c} A_{0x} + \sigma_0 \frac{A_{1x} - A_{2x}}{2 \cdot l_c} + \frac{\sigma_3 - \sigma_4}{2 \cdot l_c} A_{0y} + \sigma_0 \frac{A_{3y} - A_{4y}}{2 \cdot l_c} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

e dopo le opportune semplificazioni:

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & \left(\frac{4\sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2}{16 \cdot \sigma_0} \right) \cdot \Phi_1 + \left(\frac{4\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2}{16 \cdot \sigma_0} \right) \cdot \Phi_2 + \left(\frac{4\sigma_0 + \sigma_3 - \sigma_4}{16 \cdot \sigma_0} \right) \cdot \Phi_3 + \left(\frac{4\sigma_0 - \sigma_3 + \sigma_4}{16 \cdot \sigma_0} \right) \cdot \Phi_4 + \\ & + \frac{j\omega l_c}{8\sigma_0} [A_{0x}(\sigma_1 - \sigma_2) + A_{0y}(\sigma_3 - \sigma_4) + \sigma_0(A_{1x} - A_{2x} + A_{3y} - A_{4y})] \end{aligned} \quad (3.37)$$

o analogamente

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4\sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \Phi_1 + \left(\frac{4\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \Phi_2 + \left(\frac{4\sigma_0 + \sigma_3 - \sigma_4}{2} \right) \Phi_3 + \left(\frac{4\sigma_0 - \sigma_3 + \sigma_4}{2} \right) \Phi_4 - 8\sigma_0 \Phi_0 \\ & = -j\omega l_c [A_{0x}(\sigma_1 - \sigma_2) + A_{0y}(\sigma_3 - \sigma_4) + \sigma_0(A_{1x} - A_{2x} + A_{3y} - A_{4y})] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Per garantire la convergenza delle procedure numeriche è necessario porre che:

$$\sigma_0 \approx \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \approx \frac{\sigma_3 + \sigma_4}{2} \quad (3.39)$$

in tal modo la (3.38) diventa:

$$\begin{aligned} & (\sigma_0 + \sigma_1) \cdot \Phi_1 + (\sigma_0 + \sigma_2) \cdot \Phi_2 + (\sigma_0 + \sigma_3) \cdot \Phi_3 + (\sigma_0 + \sigma_4) \cdot \Phi_4 - 2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \Phi_0 \\ & = -j\omega l_c [A_{0x}(\sigma_1 - \sigma_2) + A_{0y}(\sigma_3 - \sigma_4) + \sigma_0(A_{1x} - A_{2x} + A_{3y} - A_{4y})] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Con semplici passaggi algebrici si può dimostrare che questa ultima espressione è equivalente alla (3.35) se si tiene conto della (3.39) e delle (3.34).

3.4.6 Discretizzazione in 3D dell'equazione SPFD per la soluzione del problema interno nel caso di solo campo magnetico impresso

La trattazione del problema tridimensionale è una semplice estensione del caso bidimensionale sia nel caso si considerino i potenziali ai vertici delle celle sia in quello che utilizza i potenziali nei centri.

Potenziali nei vertici

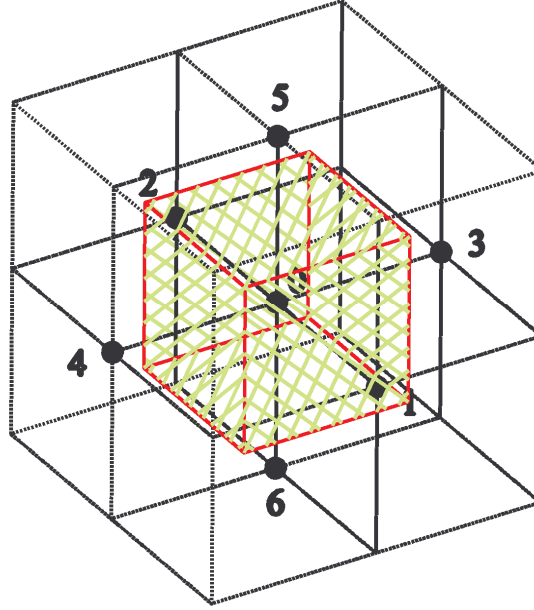


figura 18: discretizzazione 3D con potenziale ai vertici

Riferendosi alla figura 18, si applica il teorema della divergenza utilizzando come superficie chiusa il cubo centrato nel vertice considerato e con volume pari a quello delle celle con le quali si rappresenta il problema. Eseguendo le opportune semplificazioni si ottiene l'equazione della cella:

$$\Phi_{n0} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^6 \bar{\sigma}_{mi}} \right) \cdot \sum_{i=1}^6 \left\{ \bar{\sigma}_{mi} [\Phi_{ni} - (-1)^i j \omega l_c A_{mi}] \right\} \quad (3.41)$$

Nel caso tridimensionale, la sommatoria è estesa ai sei vertici vicini a quello considerato e σ_{mi} è la media delle quattro celle che condividono lo spigolo lungo cui è applicato il potenziale vettore nel punto considerato, cioè:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{m1} &= \frac{\sigma_{i+1,j+1,k} + \sigma_{i+1,j,k} + \sigma_{i+1,j+1,k+1} + \sigma_{i+1,j,k+1}}{4} & \bar{\sigma}_{m3} &= \frac{\sigma_{i+1,j+1,k} + \sigma_{i,j+1,k} + \sigma_{i+1,j+1,k+1} + \sigma_{i,j+1,k+1}}{4} \\ \bar{\sigma}_{m2} &= \frac{\sigma_{i,j+1,k} + \sigma_{i,j,k} + \sigma_{i,j+1,k+1} + \sigma_{i,j,k+1}}{4} & \bar{\sigma}_{m4} &= \frac{\sigma_{i,j,k} + \sigma_{i+1,j,k} + \sigma_{i,j,k+1} + \sigma_{i+1,j,k+1}}{4} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\bar{\sigma}_{m5} = \frac{\sigma_{i,j,k+1} + \sigma_{i+1,j,k+1} + \sigma_{i,j+1,k+1} + \sigma_{i+1,j+1,k+1}}{4}$$

$$\bar{\sigma}_{m6} = \frac{\sigma_{i,j,k} + \sigma_{i+1,j,k} + \sigma_{i,j+1,k} + \sigma_{i+1,j+1,k}}{4}$$

Potenziali nei centri

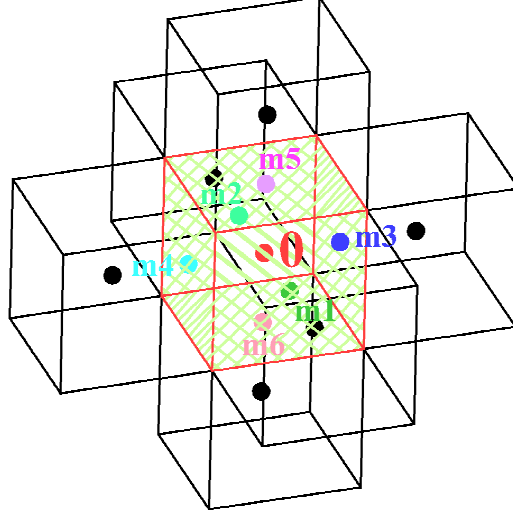


figura 19: discretizzazione 3D con potenziale ai centri

Riferendosi alla figura 19 e tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} & \sigma_{m4} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_4}{2} \\ \sigma_{m2} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_2}{2} & \sigma_{m5} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_5}{2} \\ \sigma_{m3} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_3}{2} & \sigma_{m6} &\approx \frac{\sigma_0 + \sigma_6}{2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

si ottiene una espressione del tutto analoga alla (3.41) dove però i coefficienti hanno diverso significato:

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} \cdot \Phi_1 + \sigma_{m2} \cdot \Phi_2 + \sigma_{m3} \cdot \Phi_3 + \sigma_{m4} \cdot \Phi_4 + \sigma_{m5} \cdot \Phi_5 + \sigma_{m6} \cdot \Phi_6 - \left(\sum_{i=1}^6 \sigma_{mi} \right) \Phi_0 = \\ - j\omega l_c \left(\sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \sigma_{mi} \cdot A_{mi} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.4.7 Scalarizzazione

Nelle precedenti equazioni, è possibile introdurre un nuovo potenziale incognito Φ^* tale che

$$\Phi^* = -j\Phi \quad (3.45)$$

in modo che l'equazione discretizzata del metodo SPFD diventi un'equazione scalare a coefficienti reali. Nel seguito della tesi faremo uso di questa convenzione.

3.4.8 Scelta dello schema di discretizzazione

Nel seguito della tesi si farà riferimento allo schema di discretizzazione secondo il quale il potenziale scalare è applicato ai vertici.

Tra le ragioni della scelta c'è quella che nel momento in cui si è affrontato questi problemi ci si voleva riferire ad algoritmi il più possibile sperimentati e testati. Lo schema con potenziale ai vertici è descritto in letteratura e ciò dava garanzie di correttezza che lo schema con potenziale ai centri, sviluppato nell'ambito della tesi, non poteva offrire.

Il secondo motivo riguarda la rappresentazione della superficie esterna dell'organismo ed è sinteticamente esposto nel seguito. Riferendosi alla figura 20 si ha che mentre con lo schema con potenziale ai vertici si considereranno solo quelli interni all'organismo o sulla sua superficie, nel caso si usi lo schema con potenziale ai centri si è costretti a considerare uno strato di celle esterne, dello spessore di una singola cella. Ciò è necessario in quanto il coefficiente che lega il potenziale incognito in una cella con quello in una sua vicina, è la media delle relative conducibilità.

Anche se nel seguito ci riferiremo per convenienza allo schema con potenziale applicato nei vertici, ciò nondimeno potrebbe valere la pena indagare maggiormente le potenzialità dello schema con potenziale ai centri. Uno dei possibili vantaggi potrebbe consistere nel fatto che le medie sulle conducibilità sono eseguite su due sole celle piuttosto che su quattro e ciò potrebbe comportare un'esecuzione più veloce dei calcoli, qualora, per risparmiare memoria, i coefficienti siano calcolati a partire dalle conducibilità.

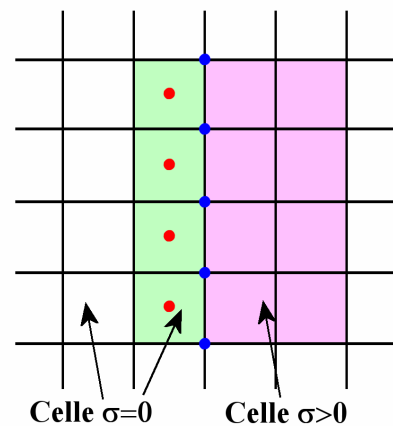


figura 20: confronto schemi di discretizzazione

3.4.9 Discretizzazione dell'equazione di Laplace per la soluzione del problema esterno nel caso di campo elettrico impresso

Nel caso del problema esterno, l'equazione differenziale da discretizzare è l'equazione di Laplace dove l'incognita è il potenziale Φ in aria.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.46)$$

La discretizzazione procede sostituendo le derivate della precedente espressione con le relative differenze finite. L'equazione di Laplace discretizzata è dunque:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 - 6 \cdot \Phi_0 = 0 \quad (3.47)$$

dove si è supposto il potenziale applicato ai vertici delle celle, secondo lo schema rappresentato in figura 18. Anche in questo caso, tenendo conto che $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi)$ si poteva procedere alla discretizzazione partendo dalla formulazione integrale, che corrisponde alla legge di Gauss in assenza di carica libera.

3.4.10 Determinazione della carica superficiale

Una volta calcolato il potenziale elettrostatico nei vertici, si determinano le cariche indotte dal campo elettrico nelle celle superficiali applicando il teorema di Gauss:

$$\oiint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \quad (3.48)$$

Lo schema di riferimento in due dimensioni è rappresentato in figura 21. Per ciascun vertice, la superficie chiusa della equazione (3.48) è rappresentata dal contorno tratteggiato che lo contiene. Le cariche calcolate sono quelle indotte nelle celle “shiftate” centrate nei vertici superficiali.

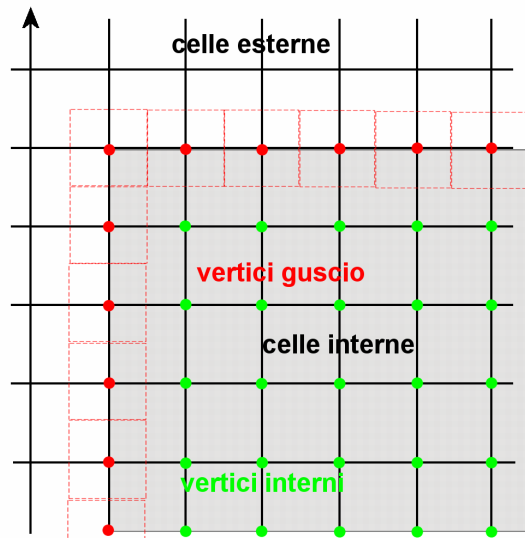


figura 21: schema di riferimento per la determinazione della carica superficiale indotta dal campo elettrico.

In tre dimensioni si ha che:

$$\begin{aligned} q_0 = q_{i,j,k} &= \sum_{w=1}^6 \left[-\epsilon_0 \left(\frac{\Phi_w - \Phi_{i,j,k}}{l_c} \right) \cdot l_c^2 \right] = \sum_{w=1}^6 [-\epsilon_0 l_c (\Phi_w - \Phi_0)] = \\ &= -\epsilon_0 l_c (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 - 6\Phi_0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

dove gli indici i,j,k individuano un vertice sulla superficie dell'organismo esposto e dove i termini Φ_w sono diversi da $\Phi_0 = \Phi_{i,j,k}$ solo se la cella considerata è in aria. Nella (3.49) si usa il sistema di indicizzazione introdotto nella figura 16 ed in figura 18 secondo il quale:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{i+1,j,k} & \Phi_3 &= \Phi_{i,j+1,k} & \Phi_5 &= \Phi_{i,j,k+1} \\ \Phi_2 &= \Phi_{i-1,j,k} & \Phi_4 &= \Phi_{i,j-1,k} & \Phi_6 &= \Phi_{i,j,k-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Il termine Φ_0 all'interno della sommatoria della (3.49) è il potenziale dell'oggetto esposto che è costante e pari a ϕ_b (nullo nel caso di soggetto connesso a terra).

La densità di carica superficiale indotta dal campo elettrico risulta quindi rappresentata da un insieme di cariche puntiformi, la cui espressione è data dalla (3.49), applicate nei vertici superficiali del soggetto esposto.

3.4.11 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno devono essere imposte:

- al margine del volume considerato (dove si impone la distribuzione di potenziale generata dalle sorgenti, supposta NON perturbata dagli oggetti stessi);
- sulla superficie ed all'interno di tutte le superfici metalliche (potenziale costante ed in particolare $\Phi=0$ se l'oggetto metallico è messo a terra).

Se l'organismo esposto non è a terra il suo valore di potenziale ϕ_B deve essere determinato.

Questa incognita aggiuntiva comporta l'introduzione di una equazione che si è visto essere diversa nel caso di soggetto perfettamente isolato da terra (3.4) e di soggetto connesso a terra tramite una resistenza nota (3.3). Queste due equazioni devono essere discretizzate; e nel caso in cui $R_{eq}=\infty$ risulta:

$$\sum_{\text{celle superficiali}} \left\{ \sum_{w=1}^6 \left[-\epsilon_0 \left(\frac{\Phi_w - \Phi_{i,j,j}}{l_c} \right) \cdot l_c^2 \right] \right\} =$$

$$= \sum_{\text{celle superficiali}} \{ -\epsilon_0 l_c (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 - 6\Phi_B) \} = 0 \quad (3.51)$$

mentre nel caso di R_{eq} finita si ha:

$$j\omega R_{eq} \sum_{\text{celle superficiali}} \left\{ \sum_{w=1}^6 \left[-\epsilon_0 \left(\frac{\Phi_w - \Phi_{i,j,j}}{l_c} \right) \cdot l_c^2 \right] \right\} =$$

$$= j\omega R_{eq} \sum_{\text{celle superficiali}} \{ -\epsilon_0 l_c (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 - 6\Phi_B) \} = \Phi_B \quad (3.52)$$

dove per le ultime due espressioni sono state utilizzate le stesse convenzioni illustrate nel paragrafo precedente.

3.4.12 Discretizzazione dell'equazione SPFD nel caso di campo elettrico impresso: la soluzione del problema esterno come termine forzante per il problema interno

La soluzione del problema esterno permette di determinare le cariche indotte dal campo elettrico sulla superficie esterna dell'organismo. In figura 21 sono evidenziati sia i vertici del cosiddetto guscio, sia le celle shiftate all'interno delle quali si determina la carica indotta dal campo elettrico.

Le celle tratteggiate sono quindi le superfici utilizzate per discretizzare la forma integrale della equazione SPFD utilizzata per risolvere il problema interno.

Considerando il solo campo elettrico impresso, si ha che l'equazione della cella per i vertici interni è la seguente:

$$\oint_S [(\sigma)(-\nabla\phi)] d\vec{S} = 0 \quad (3.53)$$

mentre quella per i vertici del guscio è:

$$\oint_S [(\sigma)(-\nabla\phi)] d\vec{S} = -j\omega q \quad (3.54)$$

dove q è la carica indotta dal campo elettrico all'interno della cella shiftata centrata nel vertice del guscio considerato.

La carica sarà distribuita sulla superficie, in modo tale che il campo elettrico esterno (e dunque anche la densità di corrente da esso iniettata all'interno dell'organismo) risulti normale alla superficie dell'organismo stesso.

Discretizzando in 3 dimensioni e considerando la (3.49), l'equazione valida per le celle superficiali è la seguente

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{m1} \cdot \Phi_1 + \bar{\sigma}_{m2} \cdot \Phi_2 + \bar{\sigma}_{m3} \cdot \Phi_3 + \bar{\sigma}_{m4} \cdot \Phi_4 + \bar{\sigma}_{m5} \cdot \Phi_5 + \bar{\sigma}_{m6} \cdot \Phi_6 - \left(\sum_{i=1}^6 \bar{\sigma}_{mi} \right) \cdot \Phi_0 = \\ = -j \frac{\omega \cdot q_0}{l_c} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Anche nel caso di esposizione al solo campo elettrico è opportuno fare riferimento alla convenzione (3.45) grazie alla quale la (3.55) diventa una equazione scalare a coefficienti reali.

3.4.13 Schemi di post processing per il calcolo della densità di corrente

Utilizzando il metodo SPFD, una volta calcolato il potenziale scalare incognito, è necessario determinare la densità di corrente, secondo la (3.22). Considerando il caso in cui il potenziale

scalare è applicato ai vertici, di seguito si illustrano alcuni tra i possibili approcci al calcolo della densità di corrente a partire dal potenziale scalare. Si valuta il caso più generale, cioè quello in cui compare il potenziale vettore legato alle sorgenti di campo magnetico; nel caso di esposizione al solo campo elettrico la densità di corrente si determina mediante le stesse formule, considerando nullo il potenziale vettore.

Per semplicità le espressioni e le figure si riferiscono al problema in due dimensioni.

Schema 1

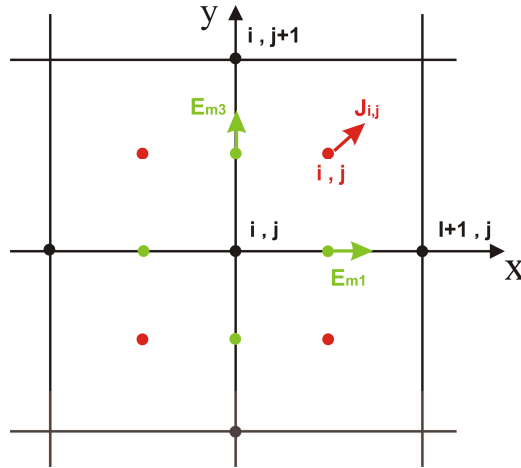


figura 22: Post processing, schema 1

$$\vec{J}_{i,j} = \sigma_{i,j} (E_{m1} \cdot \hat{i}_x + E_{m3} \cdot \hat{i}_y) \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} E_{m1} &= \left(-\frac{\Phi_{i+1,j}^* - \Phi_{i,j}^*}{l_c} - \omega A_{m1} \right) \\ E_{m3} &= \left(-\frac{\Phi_{i,j+1}^* - \Phi_{i,j}^*}{l_c} - \omega A_{m3} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Schema 2

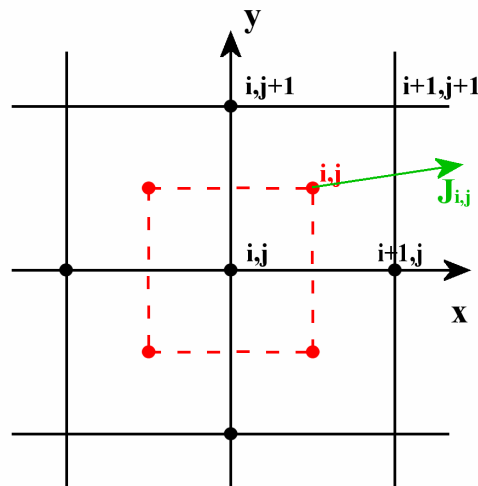


figura 23: Post processing, schema 2

$$\vec{J}_{i,j} = \bar{\sigma}_{i,j} \vec{E}_{i,j}$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{E}_{i,j} \cdot \hat{i}_x &= \left(-\frac{\Phi_{i+1,j+1}^* + \Phi_{i+1,j}^* - \Phi_{i,j+1}^* - \Phi_{i,j}^*}{2l_c} - \omega \vec{A}_{i,j} \cdot \hat{i}_x \right) \\ \vec{E}_{i,j} \cdot \hat{i}_y &= \left(-\frac{\Phi_{i+1,j+1}^* + \Phi_{i,j+1}^* - \Phi_{i+1,j}^* - \Phi_{i,j}^*}{2l_c} - \omega \vec{A}_{i,j} \cdot \hat{i}_y \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nota: il potenziale vettore è applicato nei centri

Schema 3

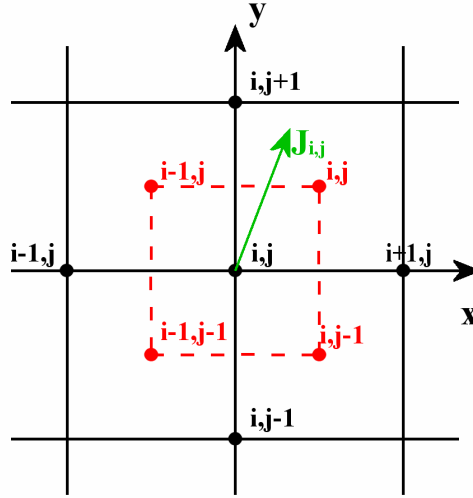


figura 24: Post processing, schema 3

$$\begin{aligned} \vec{J}_{i,j} &= \bar{\sigma}_{i,j} \vec{E}_{i,j} \quad \text{dove} \quad \vec{E}_{i,j} \cdot \hat{i}_x = \left(-\frac{\Phi_{i+1,j}^* - \Phi_{i-1,j}^*}{2l_c} - \omega \vec{A}_{i,j} \cdot \hat{i}_x \right) \\ \vec{E}_{i,j} \cdot \hat{i}_y &= \left(-\frac{\Phi_{i,j+1}^* - \Phi_{i,j-1}^*}{2l_c} - \omega \vec{A}_{i,j} \cdot \hat{i}_y \right) \\ \text{e} \\ \bar{\sigma}_{i,j} &= \frac{\sigma_{i,j} + \sigma_{i-1,j} + \sigma_{i,j-1} + \sigma_{i-1,j-1}}{4} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Nota: il potenziale vettore è applicato nei vertici

Questo ultimo schema può essere utilizzato solo adottando qualche cautela, in particolare sulla superficie esterna dell'organismo esposto. Il valore del potenziale nei vertici in aria è infatti privo di significato (l'equazione SPFD in corrispondenza di un vertice in aria degenera nell'identità $0=0$) e non deve essere considerato. Inoltre, nell'espressione della conducibilità media, è necessario tenere conto del caso in cui una o più celle tra quelle che condividono il vertice centrale, abbia conducibilità nulla.

4 IMPLEMENTAZIONE DEI PROGRAMMI DI CALCOLO

Nel capitolo precedente si è illustrato come, a partire da equazioni differenziali alle derivate parziali sia possibile arrivare a dei sistemi lineari di equazioni algebriche. In questo capitolo si passano in rassegna alcune delle tecniche mediante le quali tali sistemi possono essere risolti, utilizzando un calcolatore elettronico.

In particolare, nella prima parte del capitolo si illustrano le principali caratteristiche di tali tecniche. Nel seguito si descrivono i criteri che hanno guidato la scelta della tecnica utilizzata per la soluzione sia del problema interno, sia di quello elettrico esterno.

Nel caso del problema interno si analizzano e confrontano alcune delle possibili soluzioni, specialmente dal punto di vista delle risorse di memoria necessarie all'implementazione.

Nel caso del problema esterno si descrive la particolare tecnica di soluzione utilizzata che, da un lato permette di riutilizzare le procedure sviluppate per il problema interno, dall'altro di gestire le particolarità del problema elettrico esterno.

4.1 TECNICHE DI SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

Mediante la discretizzazione delle equazioni differenziali o integrali ci si è ricondotti a un sistema di equazioni lineari. Utilizzando il modello di organismo descritto nel paragrafo 2.1, si hanno milioni di celle e quindi di equazioni, sia per il problema esterno, sia per quello interno.

Cercando l'approccio più conveniente per risolvere questo tipo di problemi, è risultato opportuno classificare le tecniche di soluzione utilizzabili in due grandi famiglie:

- tecniche di inversione su base algebrica;
- tecniche iterative su base geometrica.

4.1.1 Tecniche di inversione su base algebrica

Con le tecniche di inversione diretta si applicano i metodi di calcolo dell'algebra lineare numerica al problema posto in forma matriciale:

$$A\phi = b \quad (4.1)$$

dove ϕ è il vettore delle N incognite, b quello dei termini noti ed A è la matrice $N \times N$ che rappresenta il problema.

La matrice A è una matrice cosiddetta *sparsa* cioè in cui solo una piccola parte degli elementi sono diversi da 0. Per questo tipo di matrici è possibile ottimizzare sia la memorizzazione sia l'inversione, non tenendo conto degli elementi nulli.

In figura 25 sono rappresentate le celle di un problema ($2 \times 3 \times 4$ celle), ciascuna individuata da un indice numerico e la matrice 24×24 associata. In particolare nella matrice sono contrassegnati con una lettera solo gli elementi non nulli, cioè quelli della diagonale principale e quelli di sei diagonali secondarie.

La lettere X, Y, Z indicano la direzione che caratterizza il legame tra le celle individuate dal relativo indice di riga e quello di colonna. Ad esempio il legame tra la cella con indice 0 e quella con indice 6 avviene lungo la direzione Z (elemento a_{06}). Nell'esempio si è associato gli indici alle celle nello stesso modo in cui ciò viene fatto per le celle dei modelli di organismo. In particolare si procede all'indicizzazione procedendo lungo le sezioni ortogonali all'asse z ordinate secondo z crescente, all'interno di ogni sezione le celle sono ordinate per righe parallele a x secondo la coordinata y crescente e all'interno di ciascuna riga le celle sono disposte per x crescente. Da ciò consegue che, in un parallelepipedo di n_x, n_y, n_z celle:

- la diagonale che rappresenta l'accoppiamento in direzione X è attaccata alla diagonale principale;
- riferendosi alla prima riga, la diagonale che rappresenta l'accoppiamento in direzione Y è separata da $(nx-1)$ colonne vuote dalla diagonale principale;
- riferendosi alla prima riga, la diagonale che rappresenta l'accoppiamento in direzione Z è separata da $(nx \cdot ny-1)$ colonne vuote dalla diagonale principale.

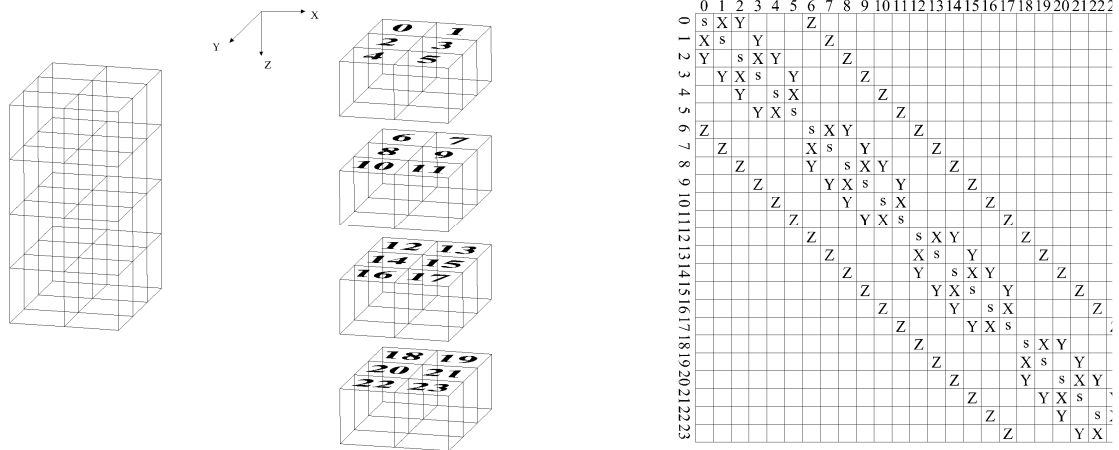


figura 25: matrice caratteristica per un problema 2x3x4

In figura 26 si rappresenta lo stesso problema considerato in figura 25 dove però sono state eliminate otto delle ventitrè celle. In alcuni casi infatti è possibile non considerare alcune celle del problema; è il caso ad esempio del problema interno e delle celle a conducibilità nulla. In figura 26 si nota come, da una parte si abbia la riduzione delle dimensioni della matrice A , dall'altro si abbia però una struttura meno regolare. In particolare i termini di accoppiamento che si riferiscono alle direzioni Y e Z non giacciono più su diagonalì ma sono disposti in modo non ordinato. Va notato che la matrice rimane comunque simmetrica.

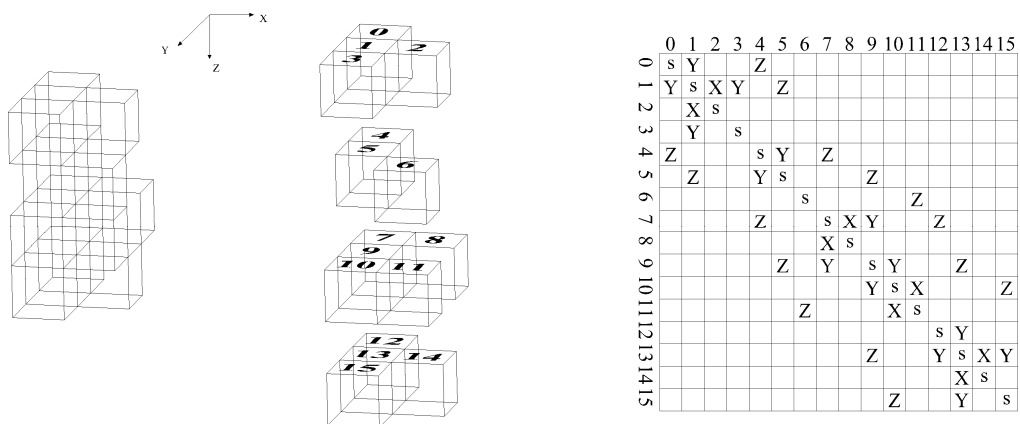


figura 26: matrice caratteristica per un problema 2x3x4 con alcune celle non considerate

Se la condizione al contorno del problema consiste in un certo numero di celle sulle quali l'incognita è nota, ciò viene imposto facendo in modo che la corrispondente equazione si riconduca ad una identità. Risulta semplice anche l'imposizione di equazioni aggiuntive rispetto a quelle ottenute dalla discretizzazione, come ad esempio quella che lega la carica totale al potenziale dell'organismo nel caso del problema esterno con soggetto esposto non cortocircuitato a terra.

4.1.2 Tecniche iterative su base geometrica

Le tecniche iterative su base geometrica, non comportano la rappresentazione del problema sotto forma di matrice.

L'equazione relativa a ciascuna cella ha la seguente forma:

$$a_1 \cdot \Phi_1 + a_2 \cdot \Phi_2 + a_3 \cdot \Phi_3 + a_4 \cdot \Phi_4 + a_5 \cdot \Phi_5 + a_6 \cdot \Phi_6 + a_0 \cdot \Phi_0 = b_0 \quad (4.2)$$

dove si è usato il sistema di indici rappresentato in figura 27. Il valore di Φ_0 al passo di iterazione ni è calcolato in funzione del valore di Φ_0 al passo di iterazione $(ni-1)$ e dei valori dei Φ_1 delle celle vicine dove alcuni di questi si riferiscono al passo di iterazione ni ed altri a quello $(ni-1)$. Si continua ad iterare sulle celle del problema fino a che la (4.2) non sia verificata entro una certa tolleranza per tutte le celle del problema.

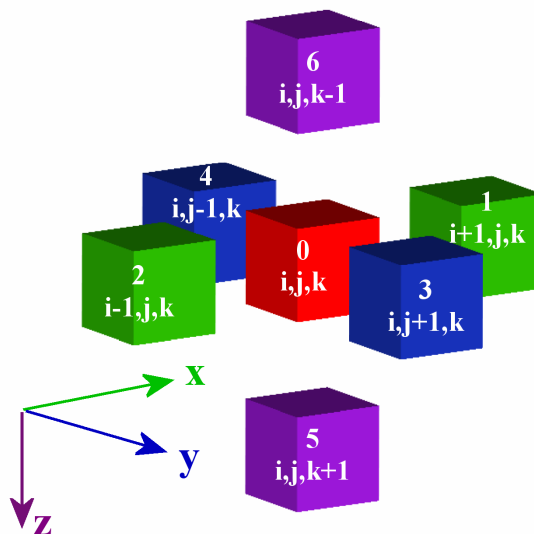


figura 27: indici delle celle in 3D.

I coefficienti a_i sono gli stessi che compongono la matrice $N \times N$ che caratterizza il problema. A partire dai sei coefficienti che rappresentano l'accoppiamento con le celle circostanti ci si riconduce a tre soli coefficienti considerando le stesse simmetrie evidenziate nel paragrafo precedente.

L'imposizione di condizioni al contorno è semplice nel caso in cui ciò sia riconducibile a porre come noto il valore delle incognite in alcune celle. In tal caso ci si limita a non iterare su tali celle.

Può non essere banale imporre delle condizioni aggiuntive, come ad esempio quella che permette di determinare il potenziale dell'organismo esposto ad un campo elettrico e che non sia cortocircuitato a terra.

4.2 SCELTA DELLA TECNICA DI SOLUZIONE PER IL PROBLEMA INTERNO

Nel caso del modello di riferimento, si hanno 196x114x626 celle per un totale di 13.987.344 celle. Ricordiamo però che si tratta della versione del modello a risoluzione più bassa (3 mm) tra quelle disponibili e che esistono anche modelli con celle di due millimetri ed un millimetro di lato.

Nel seguente paragrafo si è cerca di valutare le differenze tra le tecniche di soluzione considerate e di studiare uno schema di utilizzo della memoria applicabile non solo al problema con risoluzione a 3mm, ma, in prospettiva, anche ai problemi con risoluzione più alta.

Nella seguente analisi è stato preso in considerazione il problema interno facendo riferimento al metodo SPFD ed in particolare alla equazione della cella ottenuta supponendo che il potenziale scalare sia applicato nei vertici, riportata di seguito per comodità.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{m1} \cdot \Phi_1 + \bar{\sigma}_{m2} \cdot \Phi_2 + \bar{\sigma}_{m3} \cdot \Phi_3 + \bar{\sigma}_{m4} \cdot \Phi_4 + \bar{\sigma}_{m5} \cdot \Phi_5 + \bar{\sigma}_{m6} \cdot \Phi_6 - \left(\sum_{i=1}^6 \bar{\sigma}_{mi} \right) \cdot \Phi_0 = \\ = -j\omega \cdot l_c (\bar{\sigma}_{m1} A_{m1} - \bar{\sigma}_{m2} A_{m2} + \bar{\sigma}_{m3} A_{m3} - \bar{\sigma}_{m4} A_{m4} + \bar{\sigma}_{m5} A_{m5} - \bar{\sigma}_{m6} A_{m6}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove, con riferimento alla (4.2), si ha che:

$$\begin{aligned} a_1 = \bar{\sigma}_{m1} &= \frac{\sigma_{i+1,j+1,k} + \sigma_{i+1,j,k} + \sigma_{i+1,j+1,k+1} + \sigma_{i+1,j,k+1}}{4} \\ a_2 = \bar{\sigma}_{m2} &= \frac{\sigma_{i,j+1,k} + \sigma_{i,j,k} + \sigma_{i,j+1,k+1} + \sigma_{i,j,k+1}}{4} \\ a_3 = \bar{\sigma}_{m3} &= \frac{\sigma_{i+1,j+1,k} + \sigma_{i,j+1,k} + \sigma_{i+1,j+1,k+1} + \sigma_{i,j+1,k+1}}{4} \\ a_4 = \bar{\sigma}_{m4} &= \frac{\sigma_{i,j,k} + \sigma_{i+1,j,k} + \sigma_{i,j,k+1} + \sigma_{i+1,j,k+1}}{4} \\ a_5 = \bar{\sigma}_{m5} &= \frac{\sigma_{i,j,k+1} + \sigma_{i+1,j,k+1} + \sigma_{i,j+1,k+1} + \sigma_{i+1,j+1,k+1}}{4} \\ a_6 = \bar{\sigma}_{m6} &= \frac{\sigma_{i,j,k} + \sigma_{i+1,j,k} + \sigma_{i,j+1,k} + \sigma_{i+1,j+1,k}}{4} \\ a_0 &= - \left(\sum_{i=1}^6 a_i \right) \\ b_0 &= -j\omega \cdot l_c (\bar{\sigma}_{m1} A_{m1} - \bar{\sigma}_{m2} A_{m2} + \bar{\sigma}_{m3} A_{m3} - \bar{\sigma}_{m4} A_{m4} + \bar{\sigma}_{m5} A_{m5} - \bar{\sigma}_{m6} A_{m6}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Come si può notare, a_1 per la cella con indici (i,j,k) è uguale ad a_2 per la cella con indici $(i+1,j,k)$; ciò è equivalente a dire che la matrice A è simmetrica.

Occorre caratterizzare i modelli di organismo in termini di vertici. Nella seguente tabella sono riportati il numero di vertici in ciascuna direzione (nvx, nvy, nvz), il numero totale (N) ed il numero di vertici per i quali, almeno una tra le otto celle vicine ha conducibilità non nulla ($N \sigma > 0$).

Ris.	nvx	nvy	nvz	N	N $\sigma > 0$
3 mm	197	115	627	14 204 685	4 049 966
2 mm	294	171	940	47 257 560	13 477 873
1 mm	587	341	1879	376 113 793	104 377 500

Tabella 4: caratteristiche modelli dell'organismo

A Soluzione su base geometrica, memorizzazione dei coefficienti e nessuna indicizzazione

Per ogni cella si devono considerare:

- $4N$ numeri reali per i coefficienti a_i ;
- N numeri reali per le incognite;
- N numeri reali per i termini noti;

In totale si hanno quindi $6N$ numeri reali; implementando i programmi in doppia precisione su piattaforma a 32 bit (8 byte per ciascun numero reale) sono necessari **48N byte**.

B Soluzione su base geometrica, memorizzazione della conducibilità e del termine noto, nessuna indicizzazione

Secondo il precedente approccio, oltre alle incognite è necessario memorizzare altri 5 vettori di N elementi (tre dei sei coefficienti a_1 - a_6 , il coefficiente a_0 ed il termine noto b). Tutti i coefficienti a_i sono però ricavabili in funzione della sola conducibilità. Ciò implica che, se si memorizza la sola conducibilità, è possibile determinare "in place" il valore di ciascun coefficiente per il generico vertice con indici i,j,k . Ciò potrebbe essere fatto anche per il termine noto ma, in questo caso, vi è anche la dipendenza dal potenziale vettore, per il quale devono essere memorizzate le tre componenti, per cui risulta conveniente memorizzare direttamente il valore di b relativo a ciascun vertice.

Ricapitolando, utilizzando questa strategia per l'indicizzazione sono necessari:

- N numeri reali per le incognite
- N numeri reali per le conducibilità

- N numeri reali per il termine noto

e quindi $3N$ numeri reali in totale corrispondenti a **$24N$ byte**.

C Soluzione su base geometrica, memorizzazione della conducibilità e del termine noto, indicizzazione con palette delle conducibilità

Se si calcolano i coefficienti in funzione della conducibilità e se si utilizzano modelli dell'organismo ottenuti mediante segmentazione e successivo riconoscimento del tessuto di cui ciascun segmento, è possibile ridurre ulteriormente le risorse necessarie per rappresentare il problema. Le N celle del problema sono infatti caratterizzate dal relativo valore di conducibilità. Nel nostro particolare caso, una volta fissata la frequenza di lavoro, la conducibilità potrà assumere 58 valori differenti cioè tanti quanti sono i tessuti in cui è differenziato l'organismo. Piuttosto che utilizzare un numero reale per rappresentare la conducibilità di ciascuna cella, è possibile utilizzare un indice che individua uno tra i 58 tessuti ed utilizzarlo per individuare il relativo valore di conducibilità, che è memorizzato a parte in un vettore di 58 numeri reali. Utilizzando questo approccio sono quindi necessari:

- N numeri reali per le incognite;
- N numeri reali per il termine noto;
- N indici per le conducibilità;
- 58 numeri reali per le conducibilità.

Gli indici di conducibilità devono permettere di distinguere almeno 58 valori e sarebbero quindi sufficienti 6 bit; si utilizzano indici di un byte per semplicità. Saranno quindi necessari **$17N+464$ byte**.

D Soluzione su base algebrica

La tecnica di memorizzazione per matrici sparse presa in considerazione [48] utilizza due vettori, uno di indici interi e l'altro di numeri reali. Entrambi questi vettori hanno $N+1+nn$, elementi dove N è il numero di celle e nn è il numero di elementi della matrice non nulli tra quelli che NON appartengono alla diagonale. Tenendo conto della simmetria della matrice nn è pari $3N$, dove tre è il numero di dimensioni di accoppiamento.

Ricapitolando, per la rappresentazione di un problema con N celle, sono necessarie le seguenti risorse di memoria:

- un vettore di N numeri reali per le incognite;
- un vettore di N numeri reali per i termini noti;

- un vettore di $4N+1$ numeri reali per la matrice;
- un vettore di $4N+1$ numeri interi per la matrice;

In totale si hanno quindi $6N+1$ numeri reali e $4N+1$ numeri interi; utilizzando una piattaforma a 32 bit, i numeri interi sono rappresentati con quattro byte ed i numeri reali, se si utilizzano quelli in doppia precisione, otto byte. Per rappresentare il problema sono necessari **$64N+12$** byte.

E Soluzione su base algebrica con filtraggio celle

Le tecniche su base algebrica permettono facilmente di rappresentare solo le celle significative, come rappresentato anche in figura 26. Ciò non è facilmente implementabile utilizzando i metodi su base geometrica che necessitano di strutture per la memorizzazione direttamente collegate alla geometria del problema. Nelle (4.3) e (4.4) si può osservare che per i vertici circondati da otto celle con conducibilità nulla l'equazione della cella degenera nell'identità $0=0$. Le considerazioni del paragrafo precedente possono essere ripetute considerando $N \sigma > 0$ invece di N .

Confronto e scelta

Nella tabella seguente sono riportate le risorse di memoria necessarie per l'utilizzo di ciascuna delle soluzioni prese in considerazione.

Ris.	nvx	nvx	nvz	Nv	N $\sigma > 0$	A [MB]	B [MB]	C [MB]	D [MB]	E [MB]
3 mm	197	115	627	14204685	4049966	650	325	230	867	247
2 mm	294	171	940	47257560	13477873	2163	1082	766	2884	823
1 mm	587	341	1879	376113793	106328051	17217	8609	6098	22956	6490

Tabella 5: caratteristiche modelli dell'organismo

Per i programmi implementati nell'ambito del Dottorato sono state scelte le soluzioni A e C. In generale, la scelta di tecniche iterative su base geometrica è motivata dalla grande semplicità di codifica che le caratterizza, risultata preziosa specialmente in fase di prima implementazione. In particolare si è utilizzato il metodo A per la soluzione dei problemi a bassa risoluzione ed il metodo C per le prove con i modelli di organismo ad alta risoluzione, casi in cui l'aspetto della ottimizzazione delle risorse di memoria acquista particolare rilevanza.

4.3 SCELTA DELLA TECNICA DI SOLUZIONE PER IL PROBLEMA ESTERNO

Come esposto nel capitolo precedente, per risolvere il problema elettrico esterno si è scelto di considerare l'equazione di Laplace per il potenziale elettrostatico in aria.

L'equazione per i vertici in aria è la seguente:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 - 6 \cdot \Phi_0 = 0 \quad (4.5)$$

dove le condizioni al contorno sono:

$$\Phi = 0 \quad \begin{array}{l} \text{sul terreno e su tutti i buoni conduttori} \\ \text{presenti nel teatro espositivo, supposti} \\ \text{cortocircuitati a terra} \end{array} \quad (4.6.1)$$

$$\Phi = \Phi_B \text{ costante} \quad \begin{array}{l} \text{sull'organismo esposto} \end{array} \quad (4.7.2)$$

$$\Phi = \Phi_{\text{SORGENTI}} \text{ imperturbato} \quad \begin{array}{l} \text{sui bordi del volume considerato} \end{array} \quad (4.8.3)$$

e dove nei casi in cui Φ_B sia diverso da zero c'è da considerare una equazione aggiuntiva che permette di bilanciare nuovamente il numero di equazioni con quello delle incognite.

Il problema è risolto in aria e non si deve tenere conto della disomogeneità dell'organismo. Dal punto di vista algebrico ciò vuol dire che la matrice che rappresenta il problema avrà la struttura riportata in figura 25 dove tutti i coefficienti sulla diagonale avranno valore -6 e tutti quelli fuori dalla diagonale valore pari a 1.

Nel caso del problema esterno il valore del potenziale ai bordi costituisce una delle necessarie condizioni al contorno (4.8.3). In particolare il volume considerato deve essere sufficientemente grande affinché si possa considerare trascurabile la perturbazione al campo elettrico dovuta all'oggetto esposto.

Quindi, se da un lato non si deve considerare la disomogeneità dell'organismo, d'altra parte il volume da rappresentare è molto più grande rispetto al problema interno, e quindi, a parità di risoluzione, è molto più grande anche il numero di celle. Come vedremo nel capitolo seguente, si può affermare che affinché la perturbazione al campo elettrico generata dal modello dell'organismo possa essere considerata trascurabile, si deve stare almeno ad una distanza pari alla sua dimensione maggiore (nel caso del modello VHP l'altezza, misurata lungo l'asse z).

Il modello di riferimento è contenuto in un parallelepipedo che ha dimensioni $0,586 \times 0,34 \times 1,878 \text{ m}^3$. Aggiungendo circa 4 metri a ciascun lato si ottiene un volume di oltre cento metri cubi. Tenendo conto che sono necessarie circa 37 milioni di celle con lato pari a 3 mm per ogni metro, si ha che per rappresentare il problema con tale risoluzione sarebbero necessarie quasi quattro miliardi di celle.

Ai fini della scelta della tecnica di soluzione c'è da considerare inoltre il fatto che il problema esterno è stata preso in considerazione dopo quello interno. In una prima fase infatti ci si era concentrati sul solo problema magnetico che è quello di maggiore rilevanza dal punto di vista delle esposizioni in ambiente di lavoro. Nel momento in cui sono state implementate le procedure di calcolo per l'esposizione al campo elettrico si aveva come obiettivo anche quello di riutilizzare il più possibile le soluzioni sviluppate nel caso del problema interno ed esposizione al solo campo magnetico.

4.3.1 *Il metodo "Nested Grid Finite Difference"*

Questo metodo [45] utilizza una serie di rappresentazioni dell'organismo a risoluzione crescente, come quelle illustrate in figura 28. In figura sono indicati anche i parallelepipedi che delimitano ciascuno dei volumi considerati. Il numero delle celle, rimane costante ma variano le dimensioni delle celle e quindi anche i relativi volumi.

Subcampionamento dei modelli

I modelli rappresentati in figura 28 e figura 29 con risoluzione diversa dal modello di riferimento (quello con celle di 3mm di lato, indicato con **1x** nelle figure) sono ricavati da quest'ultimo con un apposito algoritmo.

I modelli **2x-16x** sono modelli omogenei; infatti, essendo utilizzati per la soluzione del problema esterno, non ha interesse sapere se una cella sia composta da un particolare tessuto, ma è necessario sapere solo se si tratta di una cella che rappresenta il soggetto esposto (interna o superficiale) oppure una cella esterna, in aria.

Il *subcampionamento* del modello di riferimento è effettuato utilizzando un algoritmo di cui si elencano di seguito le principali caratteristiche:

- L'origine del sistema di riferimento del modello di riferimento deve comunque coincidere con un vertice del modello subcampionato.
- Per stabilire se una generica cella del modello subcampionato è interna/superficiale oppure esterna, si considerano le celle del modello 1x in essa contenute. In particolare se il rapporto tra numero di celle interne/superficiali e quello delle celle esterne è superiore ad un certo valore f allora la cella del modello subcampionato è considerata facente parte dell'organismo.
- Il valore di f è scelto in modo che il modello subcampionato abbia un volume il più possibile simile a quello del modello di riferimento.

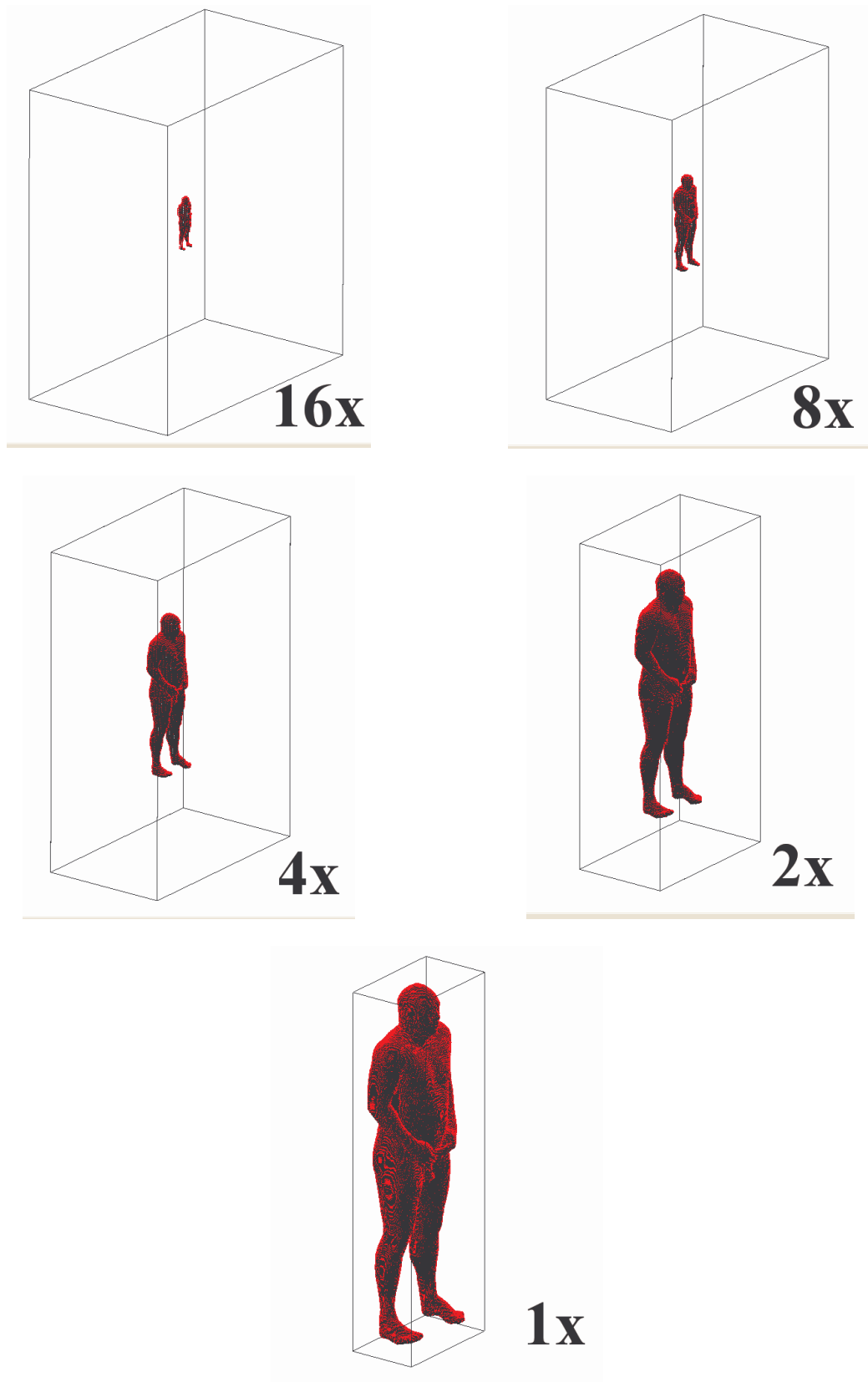


figura 28: modelli dell'organismo per il calcolo della carica superficiale.

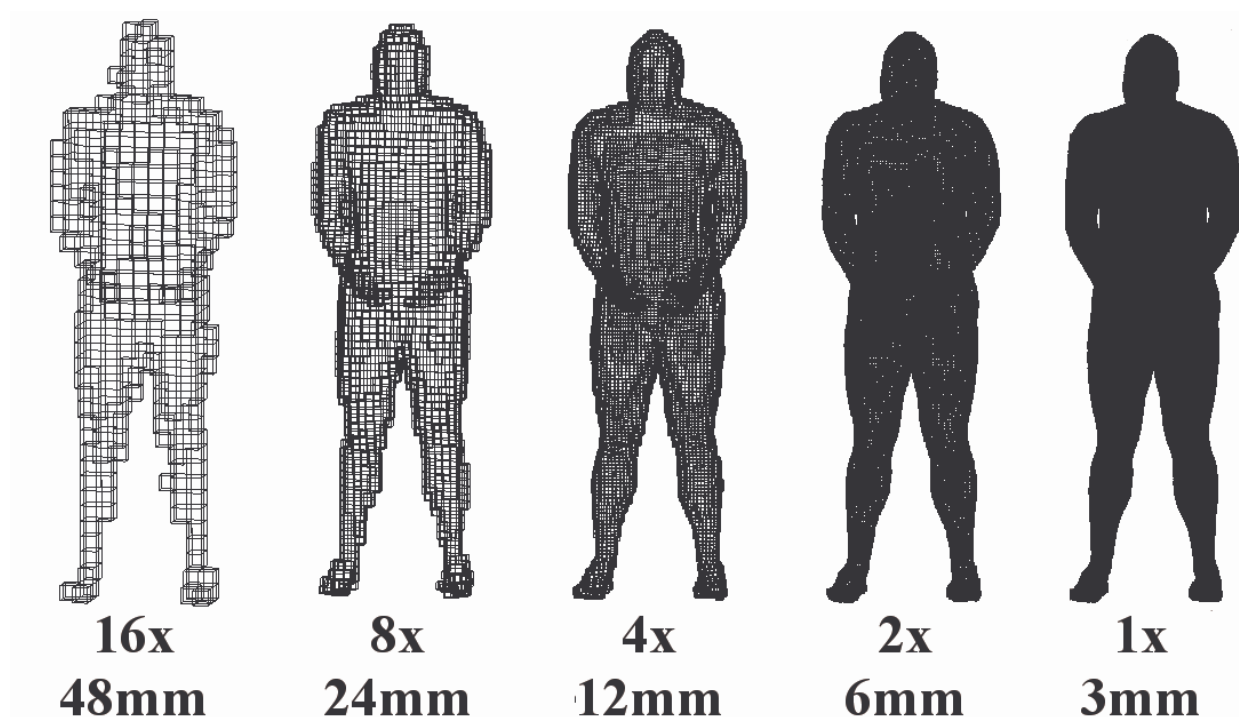


figura 29: rappresentazione dell'organismo con cinque diverse risoluzioni.

Nella seguente tabella, sono riportati i valori del parametro f ed il corrispondente volume del modello subcampionato nel caso del modello di organismo non articolato.

modello	f	Volume interno [mm ³]	Δ Volume interno [mm ³]
1x		104645682	0
2x	0.625 (5/8)	103384080	1261602
2x	0.5 (4/8)	105887520	1241838
2x	0.375 (3/8)	106700328	2054646
2x	0.25 (2/8)	108294192	3648510
4x	0.625(40/64)	101831040	2814642
4x	0.5625(36/64)	103032000	1613682
4x	0.53125(34/64)	103707648	938034
4x	0.515625(33/64)	103978944	666738
4x	0.5(32/64)	105128064	482382
8x	0.539063(276/512)	101744640	2901042
8x	0.527344(270/512)	102090240	2555442
8x	0.5(256/512)	103279104	1366578
8x	0.488281(250/512)	103762944	882738
8x	0.46875(240/512)	104523264	122418
8x	0.466797(239/512)	104633856	11826
8x	0.464844(238/512)	104716800	71118
16x	0.5(1048/2096)	102739968	1905714
16x	0.4777099(1000/2096)	104398848	246834
16x	0.475191(996/2096)	104398848	246834
16x	0.472328(990/4096)	104620032	25650
16x	0.47042(986/4096)	104841216	195534

16x	0.471851(989/4096)	104841216	195534
16x	0.467557(980/4096)	105062400	416718
16x	0.5(1048/2096)	102739968	1905714

Tabella 6: caratteristiche modelli dell'organismo

Determinazione della carica superficiale

Per la determinazione della carica superficiale si procede come segue:

- **soluzione del problema 16x:** il modello con risoluzione minore è quello che ha maggiori dimensioni e i cui margini sono maggiormente distanziati dalle celle interne. Sulle facce esterne del volume considerato si impone una distribuzione di potenziale che dia luogo al campo elettrico generato dalle sorgenti.
- **soluzione dei problemi da 8x fino a 1x:** le condizioni iniziali per il potenziale incognito sono determinate mediante interpolazione della soluzione ottenuta risolvendo il problema a risoluzione inferiore. Sulle celle ai margini del dominio di calcolo, i valori di potenziale sono fissati ed utilizzati come condizioni al contorno. I valori del potenziale nelle celle in aria, interne al dominio di calcolo, determinati risolvendo il problema a risoluzione inferiore, sono utilizzati come *precondizionamento* della soluzione del problema.
- **post processing:** si determina la carica superficiale per il modello 1x, utilizzando la (3.49).

Interpolazione della soluzione sul modello a risoluzione maggiore

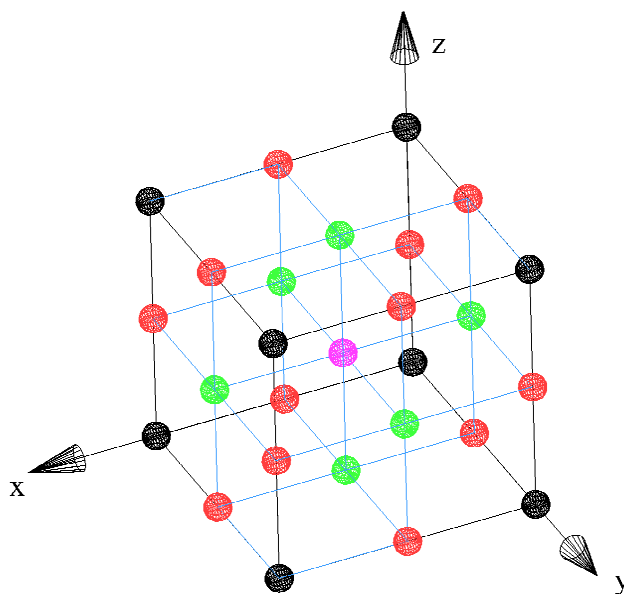


figura 30: punti di interpolazione.

L'algoritmo di subcampionamento è stato sviluppato in modo che i vertici dei modelli a diverse risoluzioni siano allineati. In particolare la generica cella del modello 16x contiene esattamente 4 celle del modello 8x che a sua volta ne contiene 4 del modello 4x e così via. Da ciò deriva che quando è necessario interpolare lo si dovrà fare solo in punti che cadono al centro della cella oppure al centro di una faccia della cella oppure al centro di uno spigolo, come rappresentato in figura 30.

Per non perdere di generalità, si è comunque pensato ad un algoritmo di interpolazione che permettesse di ricostruire il valore di una grandezza scalare Φ in un qualsiasi punto all'interno di una cella, noto il valore presso i vertici V1-V4, W1-W4 (figura 31).

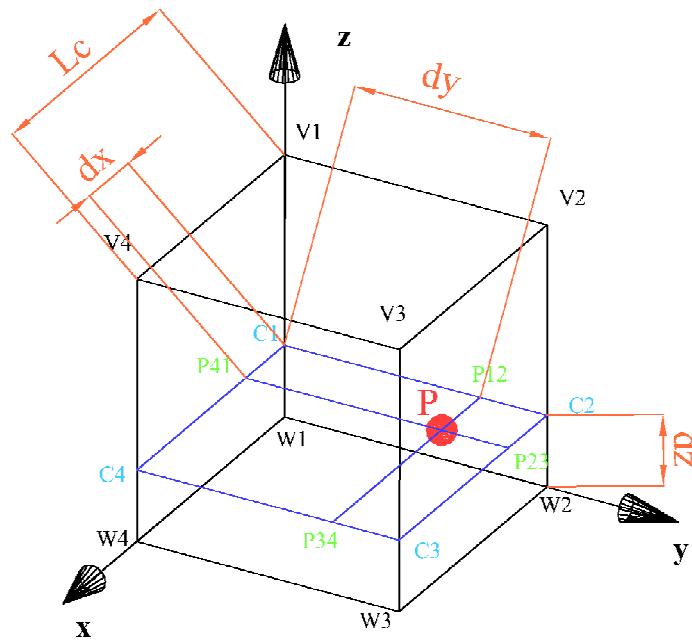


figura 31: interpolazione in 3D.

In particolare si ha che:

$$\begin{aligned}\Phi(C_i) &= \frac{\Phi(W_i)(L_c - dz) + \Phi(V_i)(dz)}{L_c} \\ \Phi(P_{12}) &= \frac{\Phi(C_1)(L_c - dy) + \Phi(C_2)(dy)}{L_c} \\ \Phi(P_{23}) &= \frac{\Phi(C_2)(L_c - dx) + \Phi(C_3)(dx)}{L_c} \\ \Phi(P_{34}) &= \frac{\Phi(C_4)(L_c - dy) + \Phi(C_3)(dy)}{L_c} \\ \Phi(P_{41}) &= \frac{\Phi(C_1)(L_c - dx) + \Phi(C_4)(dx)}{L_c}\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\Phi(P) = \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi(P_{12})(L_C - dx) + \Phi(P_{34})(dx) + \Phi(P_{41})(L_C - dy) + \Phi(P_{23})(dy)}{L_C} \right]$$

Questa forma di interpolazione risulta ottimizzata in termini di velocità di calcolo. Infatti tiene conto delle distanze tra i punti di riferimento solo lungo le direzioni coordinate e implica l'esecuzione di operazioni semplici, cioè somme, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, ma non di radici quadrate che risultano invece particolarmente onerose dal punto di vista del calcolo.

Soluzione con tecniche iterative su base geometrica per soggetto non cortocircuitato a terra

Per risolvere ciascuno dei 5 problemi a differenti risoluzioni, da 48 mm a 3mm, si è utilizzato le tecniche iterative su base geometrica illustrate nel paragrafo 4.1.2. Tuttavia ciò è stato possibile in modo immediato solo nel caso di soggetto cortocircuitato a terra, situazione nella quale il potenziale Φ_B sulle celle che rappresentano l'organismo è noto e pari a zero. Nel caso di soggetto non cortocircuitato a terra, Φ_B non è noto e si deve considerare una equazione aggiuntiva, cioè la (3.51) nel caso di soggetto perfettamente isolato, oppure la (3.52) nel caso in cui il contatto a terra sia rappresentato da una resistenza equivalente.

Le tecniche su base geometrica non permettono di considerare in modo immediato una equazione aggiuntiva, per cui si è dovuto escogitare uno stratagemma per trattare questo tipo di problemi. Nel seguito ci si riferisce al caso di soggetto perfettamente isolato, per cui la relazione aggiuntiva da imporre è che la carica totale indotta nell'organismo dal campo elettrico sia nulla.

La carica totale superficiale ha la seguente espressione:

$$Q_{tot}(\Phi_B) = \sum_{\text{celle superficiali}} \{ -\varepsilon_0 I_c (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 - 6\Phi_B) \} \quad (4.10)$$

Per determinare Φ_B si esegue la ricerca dello zero della precedente espressione; ciò è stato fatto risolvendo più volte il problema alle differenze finite (a ogni risoluzione), utilizzando un algoritmo di ricerca per bisezione.

La ricerca di Φ_B nel caso del problema 16x parte da valori iniziali per Φ_B arbitrari. per i problemi a risoluzione maggiore si cerca Φ_B partendo dal valore determinato risolvendo il problema a risoluzione immediatamente minore.

In figura 32: ricerca di Φ_B figura 32 è rappresentato l'andamento del potenziale Φ_B in funzione della risoluzione del problema, nel caso di una sfera isolata con raggio pari a 4,5 cm posta a 5 mm dal piano di terra ed esposta ad un campo elettrico uniforme di 10 kV/m. In questo caso il modello a risoluzione più alta ha celle di 1mm.

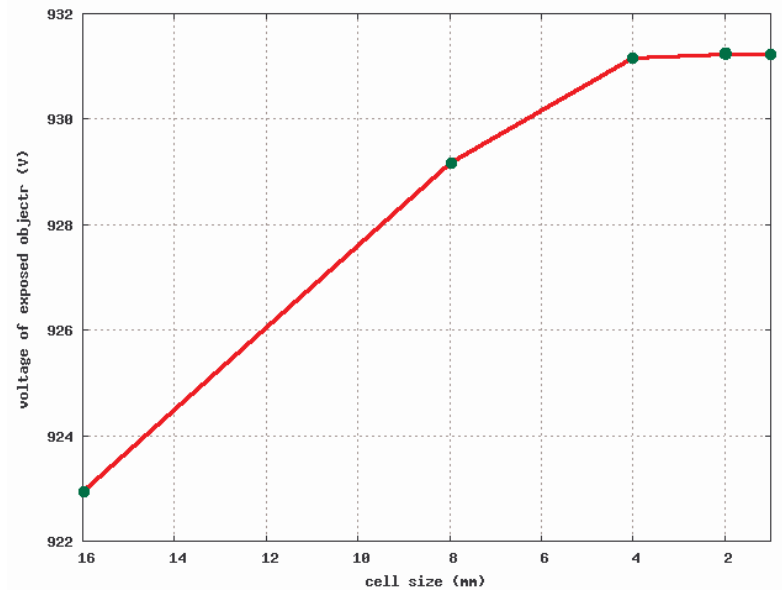


figura 32: ricerca di ΦB

L'approccio appena presentato deve essere comunque considerato come espediente per il riutilizzo del codice; per questo tipo di problemi risulta infatti più adatto un approccio basato su tecniche algebriche.

5 VALIDAZIONE DEI PROGRAMMI DI CALCOLO

Prima di applicare i programmi sviluppati a problemi reali, si è proceduto alla loro validazione. Si è trattato principalmente di confronti con modelli analitici relativi all'esposizione di oggetti omogenei di forma semplice. Avendo inoltre a disposizione i risultati di misure effettuate su fantocci salini, nel caso di solo campo magnetico impresso, è stato possibile anche il confronto dei risultati del calcolo con dati sperimentali.

5.1 CONFRONTO CON MODELLI ANALITICI

La validazione, con modelli analitici è stata effettuata sia nel caso di campo magnetico sia di campo elettrico impresso. Ci si è riferiti a casi in cui fosse disponibile la soluzione analitica ed in particolare ad oggetti omogenei di forma semplice come ad esempio la sfera e lo sferoide prolato.

Per valutare le differenze tra i risultati forniti dai modelli analitici e quelli calcolati mediante i programmi sviluppati ci si è riferiti alla distribuzione, su alcune sezioni significative, della grandezza:

$$100 \cdot \frac{|\vec{E}_{analytical} - \vec{E}_{numerical}|}{|\vec{E}_{analytical}|} \quad (5.1)$$

cioè dello *scarto relativo percentuale* tra campo elettrico interno determinato analiticamente e campo elettrico calcolato.

Per il calcolo del campo elettrico numerico ci si è riferiti allo schema di post processing n.1, descritto nel paragrafo 3.4.13. Il modello analitico è stato utilizzato in modo da determinare il campo elettrico in accordo con lo schema di post processing scelto.

Il confronto tra modello analitico e risultati del calcolo è stato effettuato riferendosi a problemi confinati in un volume cubico di un milione di celle (100 celle di lato); si è supposto che le celle avessero lato pari ad 1mm e quindi il problema risulta confinato in un decimetro cubo.

5.1.1 Problema magnetico

Non si riportano in questa sede i dettagli dei modelli analitici che sono riportati in [49][50][51][52][53][54]. Nella pagina seguente sono riportate le espressioni analitiche del campo elettrico, utilizzate per il calcolo dello scarto relativo percentuale che verrà poi rappresentato nelle figure delle pagine successive.

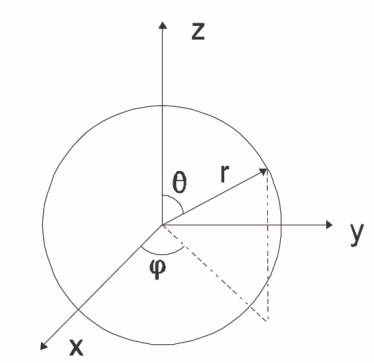
Sfera, campo magnetico parallelo a z: espressione campo elettrico interno


figura 33: sfera, coordinate sferiche

$$\vec{E}(r, \varphi) = -j \frac{1}{2} \omega \mu_0 H_0 r \sin \vartheta \hat{\phi} \quad (5.2)$$

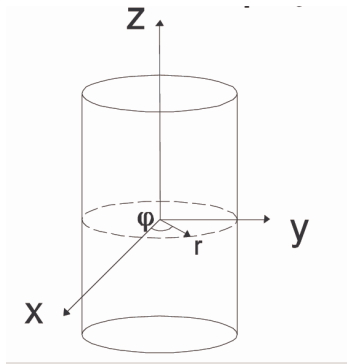
Cilindro, campo magnetico parallelo a z: espressione campo elettrico interno


figura 34: cilindro, coordinate cilindriche

$$\vec{E}(r, \varphi) = -j \frac{1}{2} \omega \mu_0 H_0 r \hat{\phi} \quad (5.3)$$

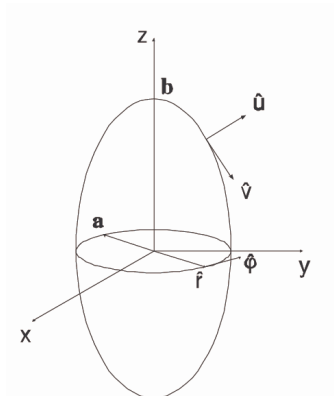
Sferoide prolato, campo magnetico parallelo all'asse z: espressione campo elettrico interno


figura 35: sferoide prolato, coordinate cilindriche

$$\vec{E}(r, \varphi) = -j \frac{1}{2} \omega \mu_0 H_0 r \hat{\phi} \quad (5.4)$$

Sferoide prolato, campo magnetico parallelo all'asse x: espressione campo elettrico interno

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = -j \omega \mu_0 H_0 \left\{ \frac{b^2}{a^2 + b^2} r \sin(\varphi) \hat{z} - \frac{a^2}{a^2 + b^2} z [\sin(\varphi) \hat{r} + \cos(\varphi) \hat{\phi}] \right\} \quad (5.5)$$

Problema magnetico sfera: distribuzione scarto relativo percentuale

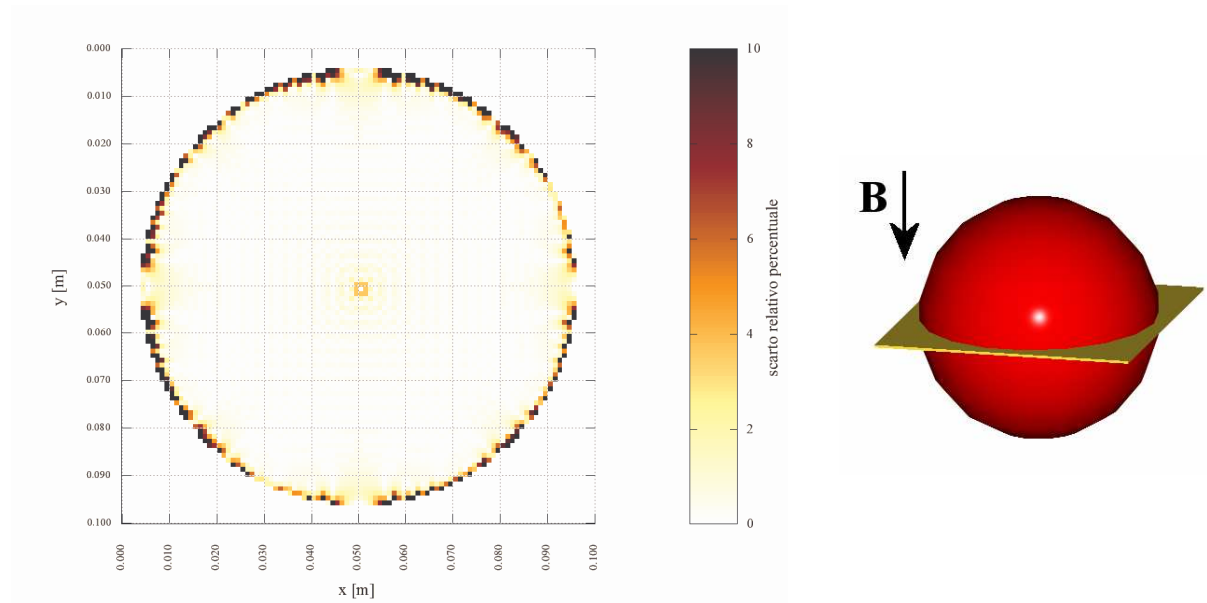


figura 36: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione ortogonale al campo magnetico

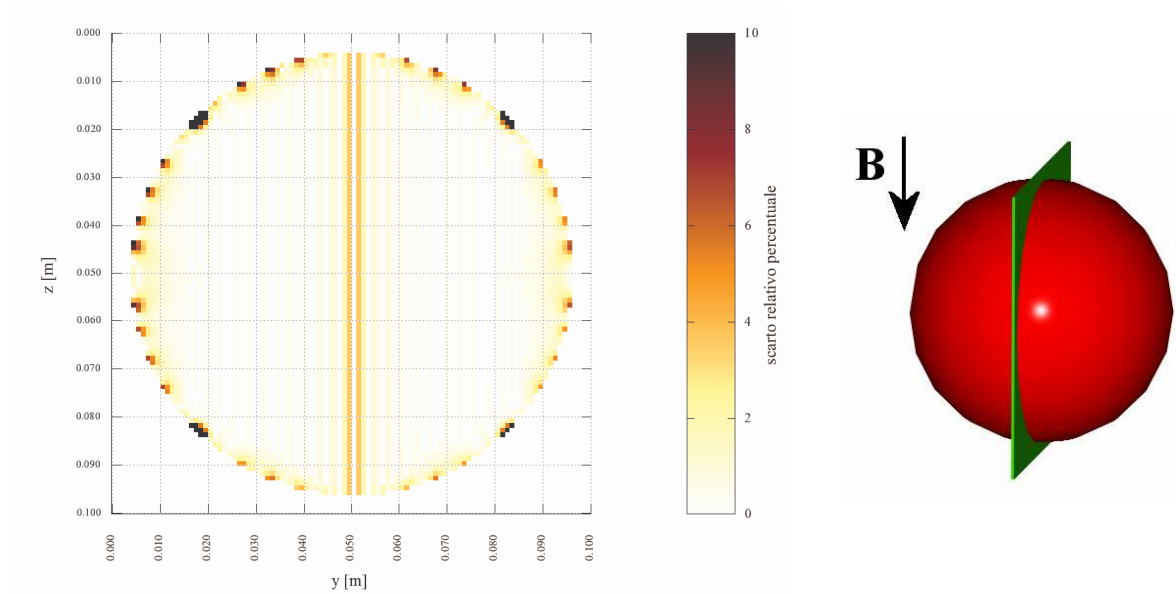


figura 37: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione con generatrice parallela al campo magnetico

Problema magnetico cilindro

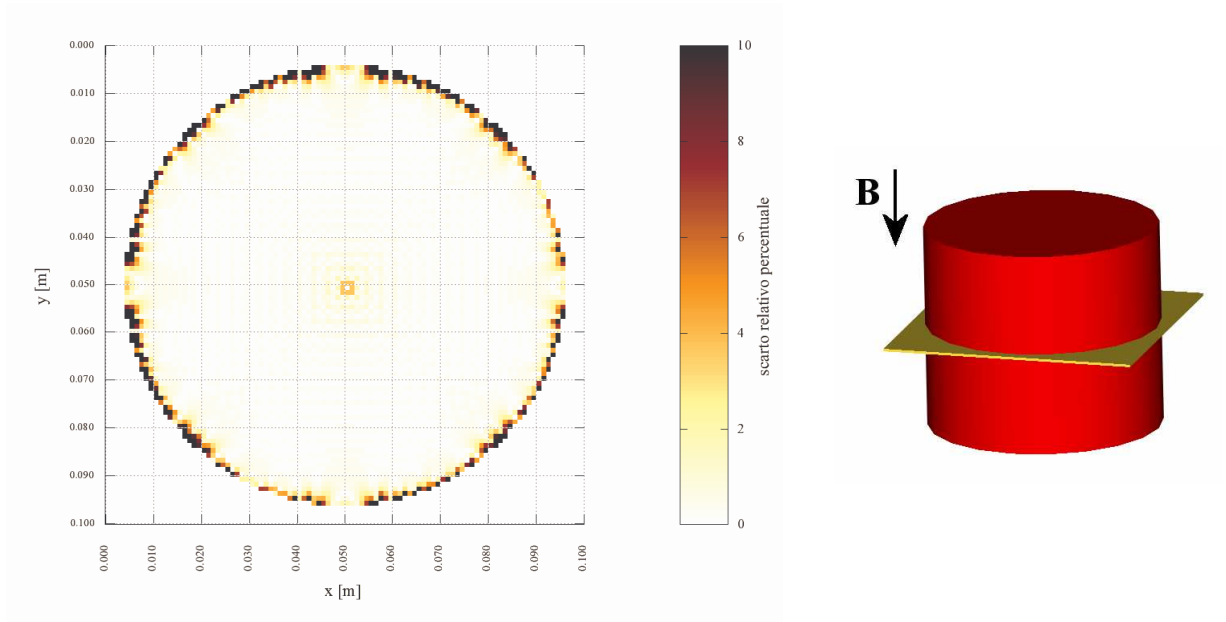


figura 38: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione ortogonale al campo magnetico

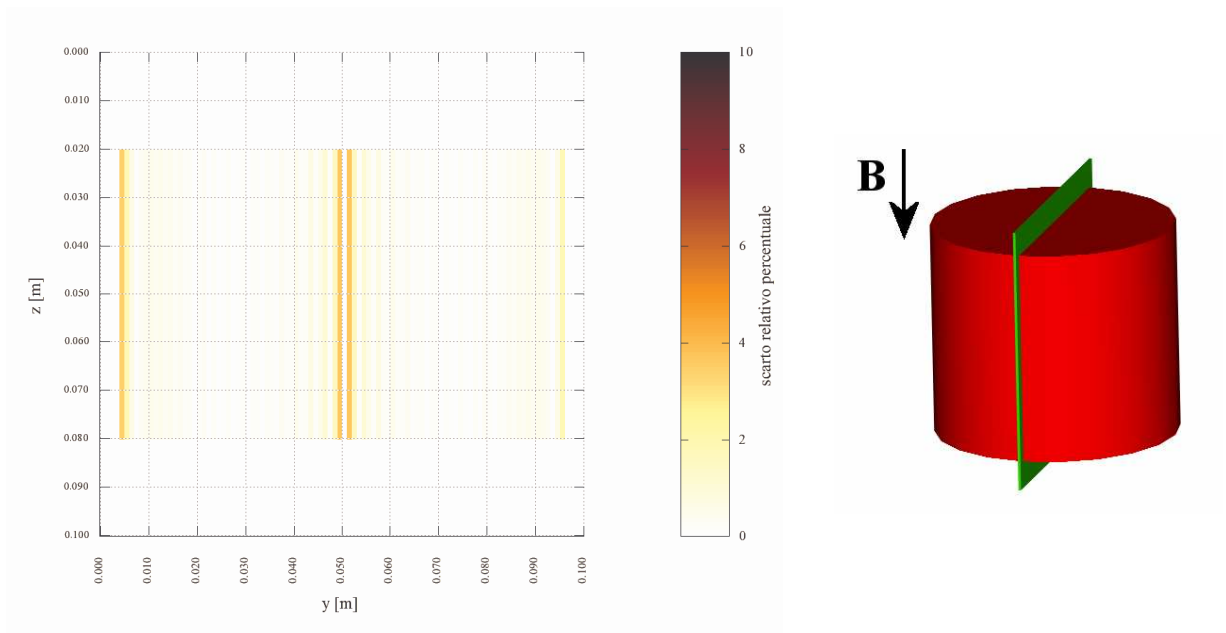


figura 39: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione con generatrice parallela al campo magnetico

Problema magnetico: sferoide prolato campo magnetico parallelo all'asse z

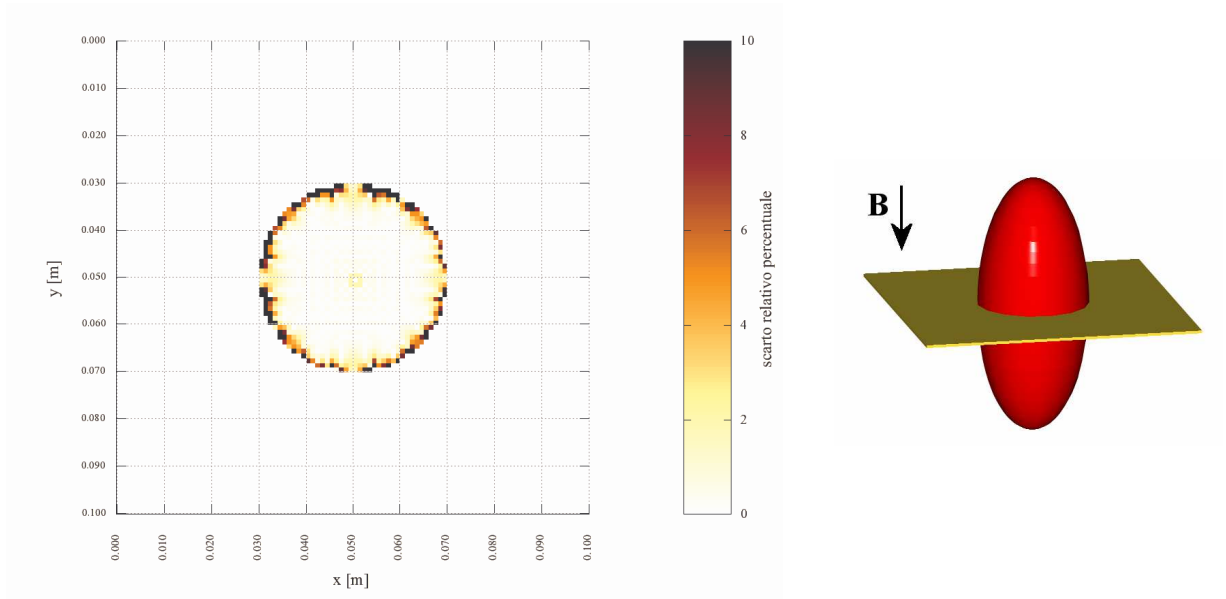


figura 40: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione ortogonale al campo magnetico

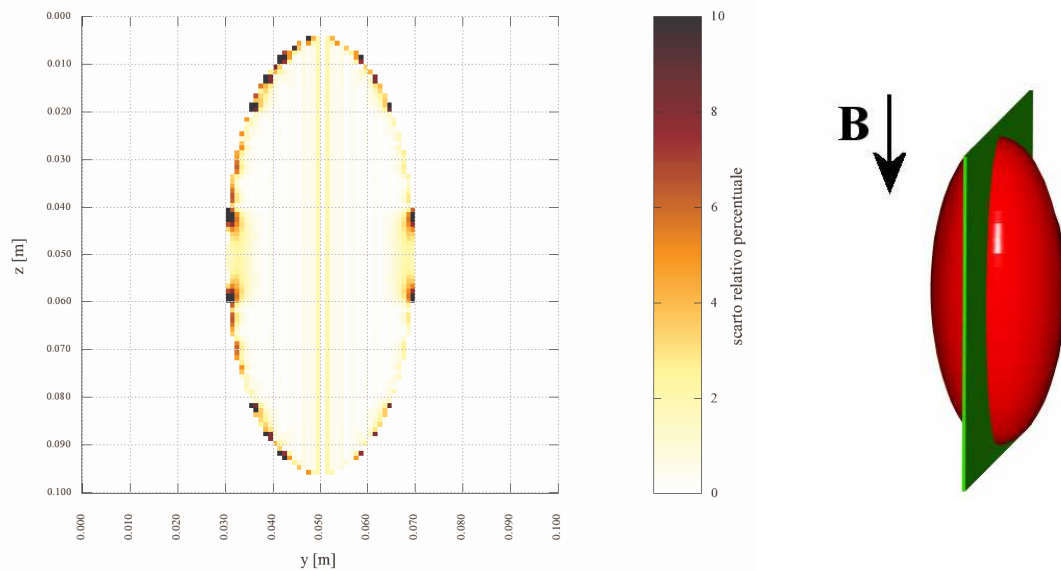


figura 41: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione con generatrice parallela al campo magnetico

Problema magnetico: sferoide prolato campo magnetico ortogonale all'asse x

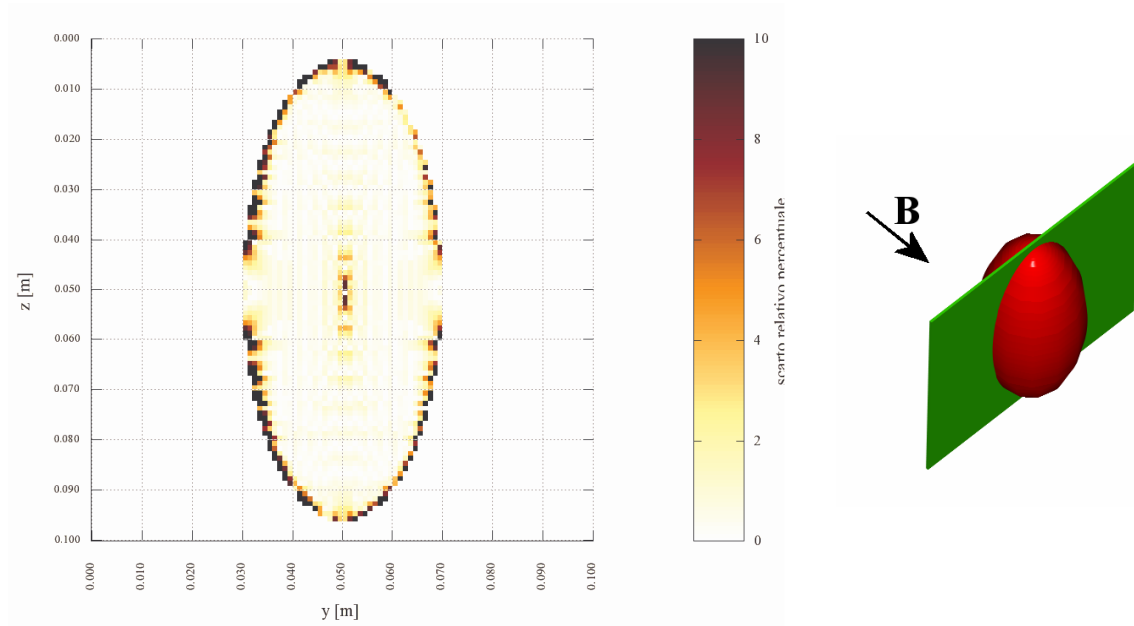


figura 42: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione ortogonale al campo magnetico

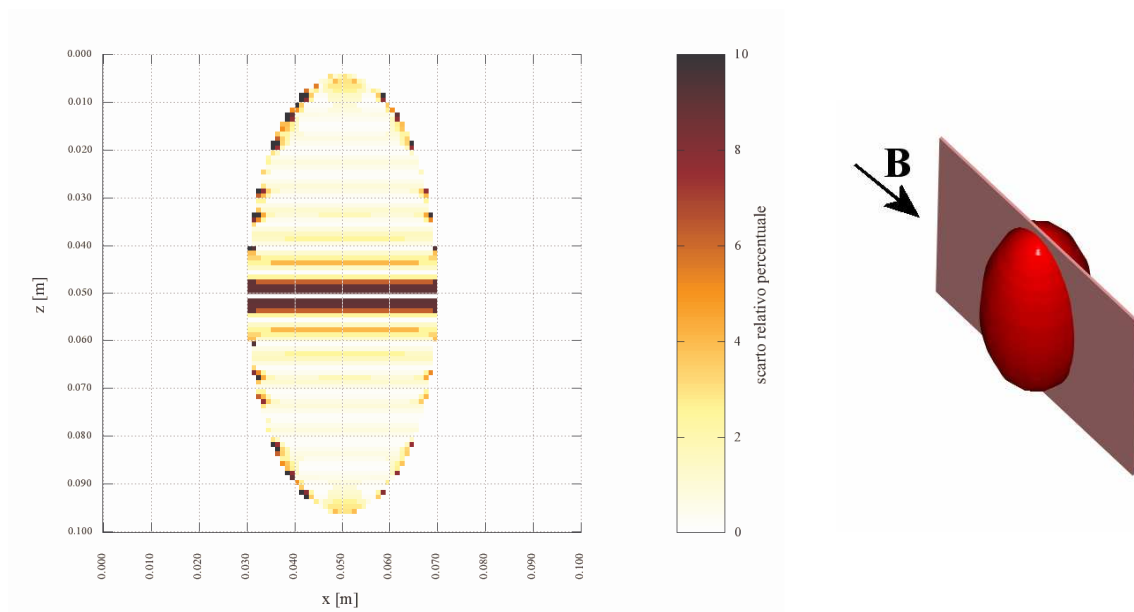


figura 43: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione con generatrice parallela al campo magnetico

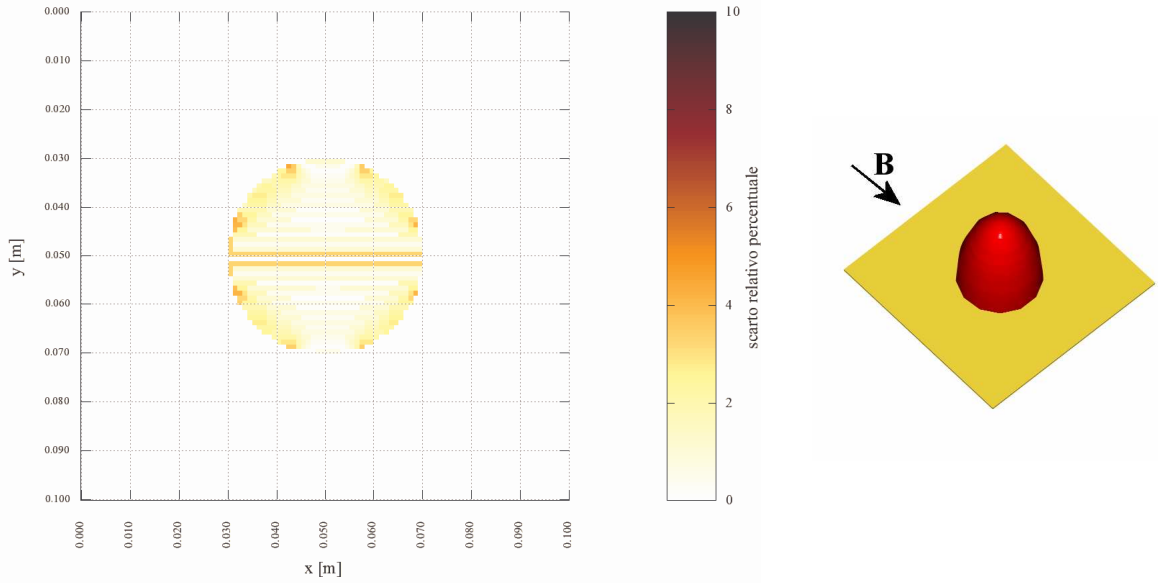


figura 44: scarto relativo percentuale del campo elettrico interno su una sezione con generatrice parallela al campo magnetico

Conclusioni

All'interno degli oggetti esposti sia hanno scarti inferiori al 3%; lo scarto in prossimità dell'asse parallelo al campo magnetico, è dovuto al fatto che al denominatore vi è una grandezza prossima a zero. Le differenze più significative sono quelle localizzate sulla superficie dell'oggetto esposto e sono dovute principalmente alla rappresentazione discretizzata delle superficie.

5.1.2 Problema elettrico esterno

Sfera metallica scarica e nessun piano di massa

Una sfera conduttrice di raggio R immersa in un campo elettrico impresso uniforme di intensità E_0 parallelo all'asse z , perturba il campo elettrico stesso, che assume la seguente espressione (coordinate sferiche e origine nel centro della sfera) [55]:

$$\vec{E}(r, \vartheta) = E_0 \left[\hat{r} \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \vartheta - \hat{\vartheta} \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \vartheta \right] \quad (5.6)$$

In particolare, sulla superficie della sfera si ha che, imponendo $r=R$ nella precedente

$$\vec{E}(R, \vartheta) = 3E_0 \cos \vartheta \hat{r} \quad (5.7)$$

Applicando il teorema di Gauss si ottiene che la densità di carica superficiale sulla sfera ha espressione:

$$\eta(\vartheta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \vartheta \quad (5.8)$$

Integrando la precedente sulla semisfera individuata dal piano ortogonale al campo elettrico $z=z_{\text{centro}}$, si ha che la carica netta presente su di essa vale

$$Q = 3\pi R^2 \epsilon_0 E_0 \quad (5.9)$$

Le verifiche effettuate hanno avuto per oggetto il campo elettrico ai poli e la carica sulla semisfera. Nel caso di un campo elettrico impresso pari a 10 kV/m il campo ai poli, in accordo con la (5.7) dovrebbe valere 30 kV/m.

I calcoli sono stati eseguiti considerando una sfera con 45 mm di lato e discretizzando il problema con celle di 1mm cubo. Nella seguente figura è rappresentata la distribuzione del campo elettrico sul polo della sfera discretizzata. Come si può notare il polo è leggermente schiacciato ed è costituito da oltre 120 facce di celle. Il campo elettrico va dai 28kV/ a 32kV/m e la sua media sulle celle che rappresentano il polo è pari a 30.028 V/m e quindi molto vicina al valore ricavato analiticamente.

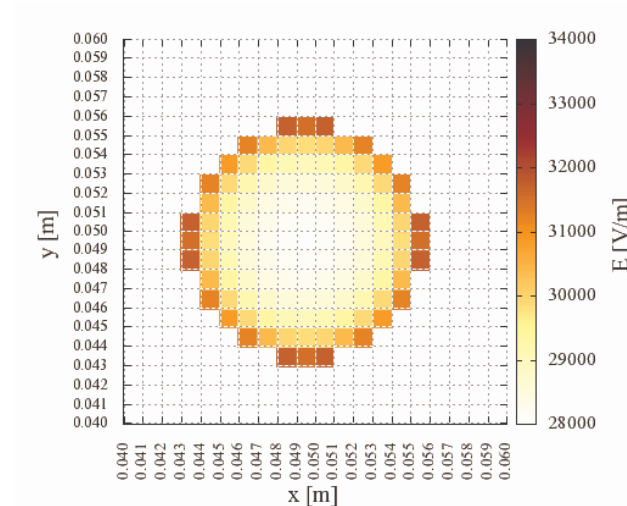


figura 45: campo elettrico ai poli

Utilizzando la (5.9) si ottiene una carica pari a $1.69 \cdot 10^{-9}$ C, mediante i calcoli si ottiene un risultato con meno dell'1% di scarto relativo.

5.1.3 Problema elettrico interno

Nel caso del paragrafo precedente, se si affronta il problema interno si ha che il campo elettrico è uniforme e diretto lungo z. Ne consegue che la densità di corrente è anch'essa uniforme e costante all'interno della sfera [55]. In particolare, per determinare l'ampiezza della densità di corrente, si può dividere la corrente totale che fluisce sulla sezione mediana della sfera, data dalla variazione nel tempo della carica indotta sulla superficie di ciascuna semisfera, per l'area della sezione stessa:

$$J = \frac{\omega Q}{\pi R^2} = \frac{\omega 3\pi R^2 \varepsilon_0 E_0}{\pi R^2} = 3\omega \varepsilon_0 E_0 = 6\pi f \varepsilon_0 E_0 \quad (5.10)$$

Posta la frequenza pari a 1 Hz ed E_0 pari a 10 kV/m si ha che $J=1,66897\mu\text{A}/\text{m}^2$.

Nella figura seguente è rappresentata la distribuzione dello scarto relativo percentuale tra densità di corrente calcolata ed il valore determinato analiticamente.

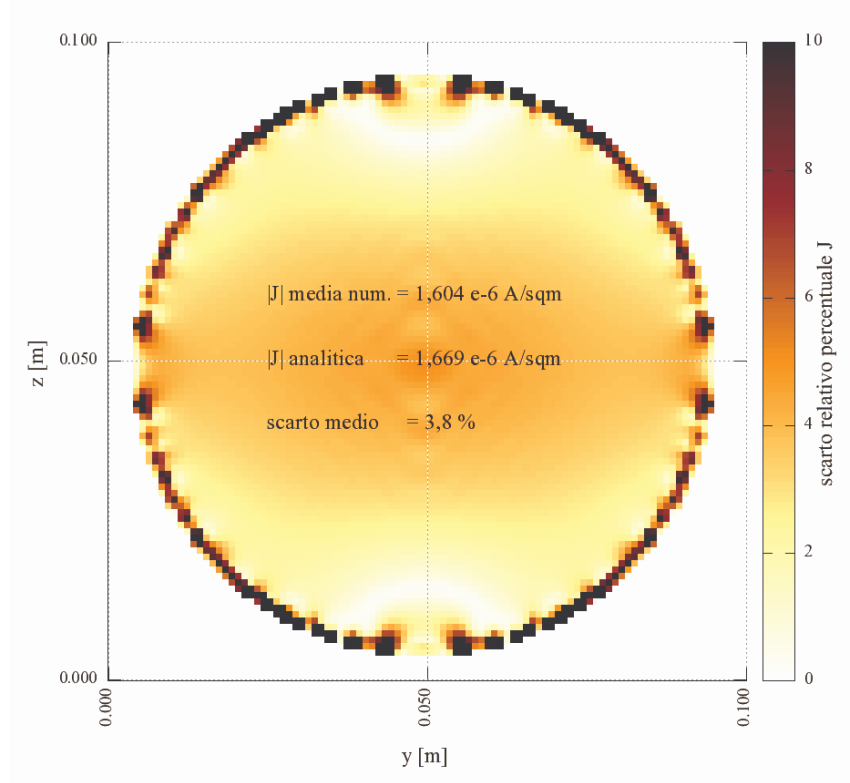


figura 46: scarto relativo percentuale densità di corrente

Come si può notare lo scarto medio è inferiore al 4% e, anche questa volta, le differenze maggiori sono localizzate presso la superficie dell'oggetto esposto.

5.2 CONFRONTO CON MISURE

Avendo a disposizione i risultati di misure effettuate su fantocci salini, nel solo caso di campo magnetico impresso, è stato possibile anche il confronto dei risultati del calcolo con dati sperimentali.

Il fantoccio considerato era costituito da un parallelepipedo in plexiglas con base di cm 23x11,5 cm², riempito di soluzione acquosa di cloruro di sodio, con concentrazione prestabilita in base alla conducibilità desiderata (4,3 S/m). I dettagli relativi al sistema di misura, alla sua calibrazione ed alle misure effettuate sono riportati in [19] e [20].

Nella seguente figura i risultati sperimentali (simboli) vengono confrontati con le previsioni del modello numerico; l'origine del riferimento cartesiano è nel centro del parallelepipedo e l'asse X è diretto parallelamente al suo lato lungo.

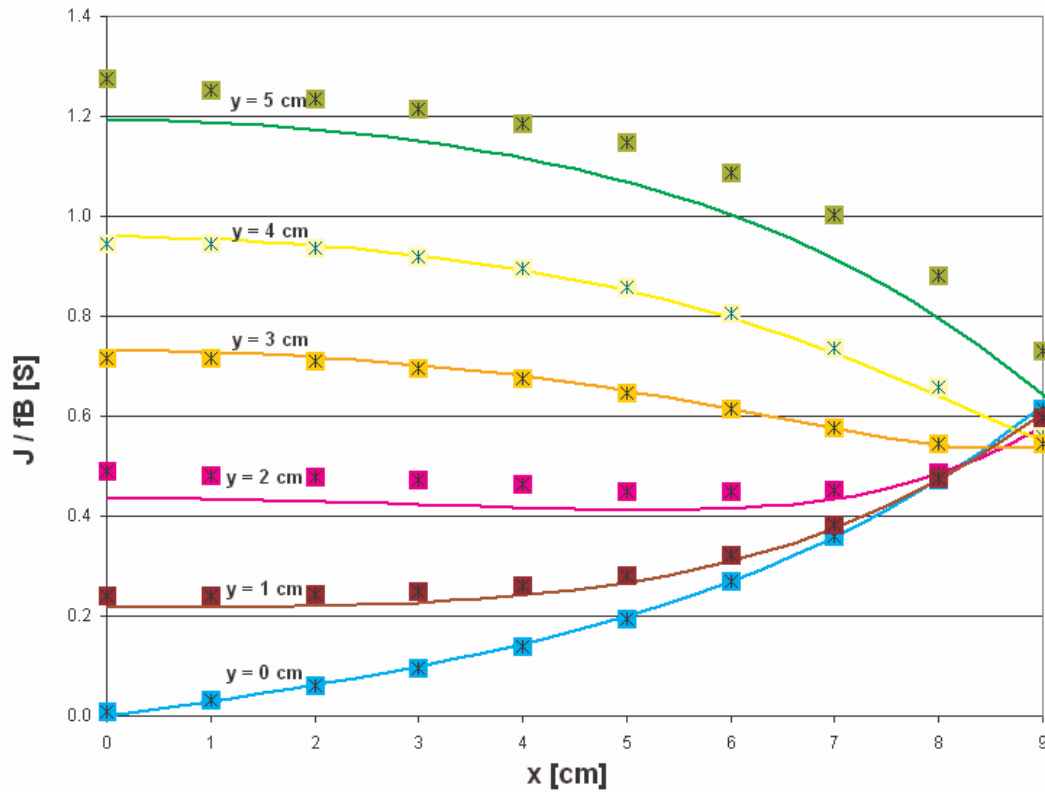


figura 47: validazione con dati sperimentali

Nella seguente tabella sono riportati gli scarti relativi percentuali corrispondenti

Scarti percentuali relativi misure-calcoli						
	y [cm]					
x [cm]	0	1	2	3	4	5
0	-99,2	-10,0	-11,2	2,1	1,3	-6,6
1	-13,4	-9,9	-9,8	1,5	0,9	-5,2
2	-6,7	-10,0	-10,1	1,3	0,9	-4,8
3	3,5	-8,8	-10,3	1,0	0,3	-5,2
4	-0,7	-8,2	-9,8	1,1	0,1	-5,5
5	-3,8	-7,4	-8,3	1,4	0,2	-5,9
6	0,2	-3,6	-7,3	0,2	-1,3	-7,8
7	-3,2	-3,7	-4,7	0,4	-0,5	-7,7
8	-5,2	-4,9	-3,1	0,5	0,2	-6,6
9	0,9	1,4	1,3	-0,7	-1,5	-11,9

Tabella 7: scarti relativi percentuali calcoli-misure

6 CASI STUDIO E DIRETTIVA 2004/40/CE

In questo capitolo si presentano due casi studio a cui sono applicati tutti gli strumenti sviluppati nell'ambito del Dottorato, descritti nei precedenti capitoli.

Il primo caso è relativo all'esposizione al solo campo magnetico generato da un fornello ad induzione, utilizzato nell'industria orafa. Si tratta di una sorgente che, nel caso specifico, dà luogo a valori di campo più intensi di quasi due ordini di grandezza rispetto ai limiti della normativa, riportati nel capitolo introduttivo.

Il secondo caso prende in considerazione sia l'esposizione al campo magnetico, sia l'esposizione al campo elettrico ed è relativo ad una linea elettrica ad alta tensione. Grazie all'approssimazione quasi-statica, il problema elettrico e quello magnetico sono affrontati e presentati indipendentemente l'uno dall'altro. Tuttavia, nella parte finale del capitolo si propone una forma di composizione dei risultati delle due analisi, che risulta possibile grazie alle particolari caratteristiche del tipo di sorgente esaminato.

6.1 ESPOSIZIONE AL CAMPO MAGNETICO GENERATO DA FORNI AD INDUZIONE

Il primo caso studio affrontato è quello dell'esposizione al campo magnetico generato da un forno ad induzione utilizzato nell'industria orafa. Questo tipo di apparecchio utilizza campi magnetici di forte intensità per indurre correnti parassite nei metalli da lavorare, scaldandoli fino a farli fondere. Le frequenze di lavoro tipiche vanno da qualche kilohertz a qualche decina di kilohertz. Si tratta sostanzialmente di un solenoide avvolto intorno ad un crogiolo cilindrico, collegato ad un generatore a radiofrequenza. In figura 48 sono riportati una foto ed uno schema di funzionamento.

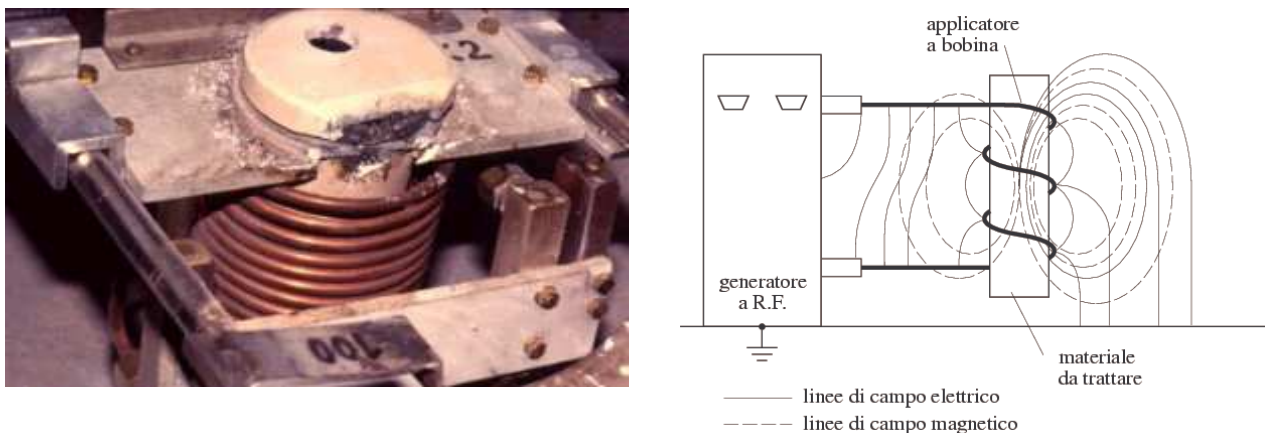


figura 48: fornello a induzione utilizzato nella industria orafa

La tensione di lavoro è in genere bassa e ciò fa sì che si possa trascurare il campo elettrico. Il campo magnetico invece può superare anche di diversi ordini di grandezza i limiti imposti dalla normativa, considerando anche che l'operatore lavora in genere abbastanza vicino al crogiolo.

Nel seguito si presentano i dettagli dell'analisi svolta ed in particolare l'aspetto della modellazione della sorgente e quello dei risultati dei calcoli effettuati.

6.1.1 modellazione della sorgente

L'induzione magnetica generata da questa sorgente può essere calcolata utilizzando la (6.1) cioè mediante integrazione della legge di Biot-Savart in forma differenziale lungo il circuito percorso da corrente. Nel caso del metodo SPFD, è necessario caratterizzare la sorgente in termini di potenziale vettore, e si utilizza quindi la (6.2).

Le dimensioni del solenoide (diametro ed altezza del cilindro) sono state ricavate dalla documentazione tecnica del costruttore. Ciò vale anche per l'intensità della corrente che è in accordo con i dati elettrici dell'apparecchio (potenza e tensione di lavoro).

$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{dP \times (Q - P)}{|Q - P|^3} \quad (6.1)$$

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in \Gamma} \frac{dP}{|Q - P|} \quad (6.2)$$

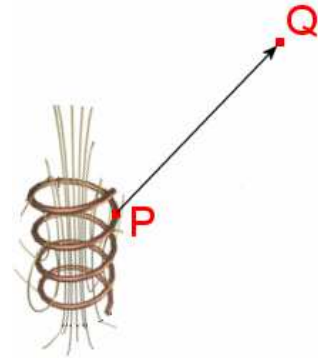


figura 49: integrazione lungo la curva che descrive il solenoide

Il numero di avvolgimenti e la posizione esatta del solenoide all'interno dell'apparato sono stati invece aggiustati in modo che i calcoli fossero in accordo con le misure di induzione magnetica disponibili. I punti relativi alle due serie di misure sono rappresentati in figura 50, mentre nelle due figure successive è riportato il confronto tra calcoli e dati sperimentali.

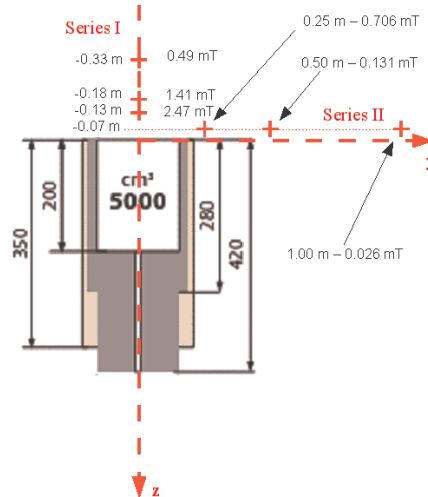


figura 50: punti di misura crogiolo

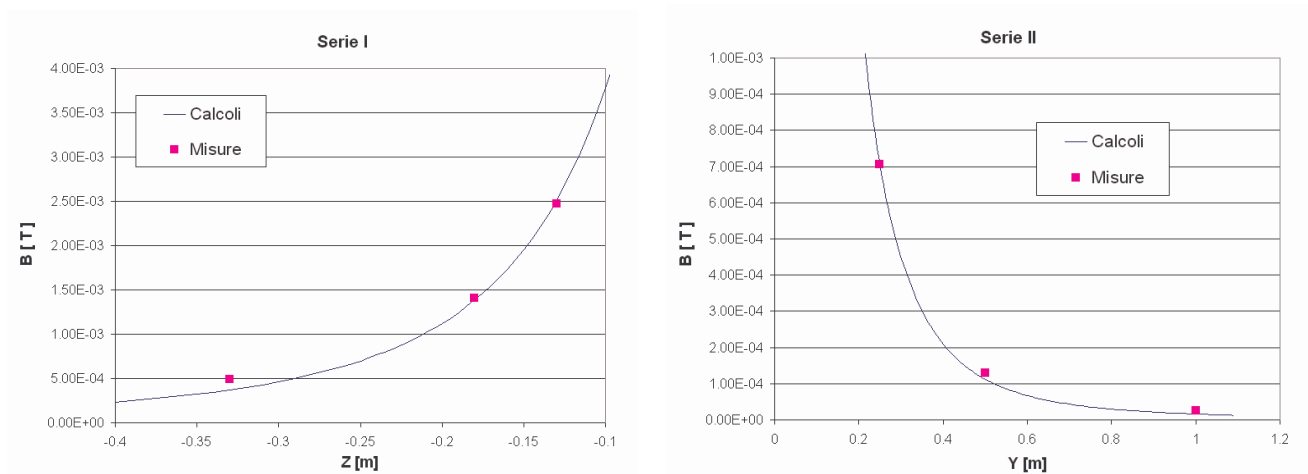


figura 51: misure-calcoli induzione magnetica crogiolo

6.1.2 Condizioni di esposizione nel caso studio analizzato e presentazione dei risultati

Il caso trattato si riferisce alla situazione rappresentata in figura 52. I conduttori sono distanti meno di 10 centimetri dalle dita del modello dell'organismo; in particolare, nel sistema di riferimento del teatro espositivo, le coordinate del centro del solenoide hanno coordinate pari a $C_x=0,3m$ $C_y=0,75m$ $C_z=0,85m$.

La frequenza di lavoro è pari a 3450 Hz. A tale frequenza, il valore di azione per l'induzione magnetica è pari a $30,7 \mu T$ ed il valore limite di esposizione per la densità di corrente è pari a $34,5 mA/m^2$.

L'induzione magnetica assume valori ben maggiori del valore di azione. Nella zona occupata dalle mani del soggetto esposto, ad esempio, l'induzione magnetica supera i 2 mT; nella porzione anteriore del tronco i valori di induzione magnetica superano i $100 \mu T$. Nelle seguenti pagine sono riportate, nell'ordine, la distribuzione dell'induzione magnetica su tre sezioni (sagittale centrale, coronale, assiale) e quindi sulle stesse sezioni le mappe di conducibilità ed infine della densità di corrente calcolata.

Nella tabella a fianco sono riportati gli organi ed i distretti presso i quali il valore limite di esposizione viene violato ed il relativo valore di densità di corrente. Va detto che si tratta dei valori massimi calcolati mentre per una applicazione rigorosa della normativa si dovrebbe considerare la media della densità di corrente su una superficie di $1 cm^2$ ortogonale alla densità di corrente stessa.

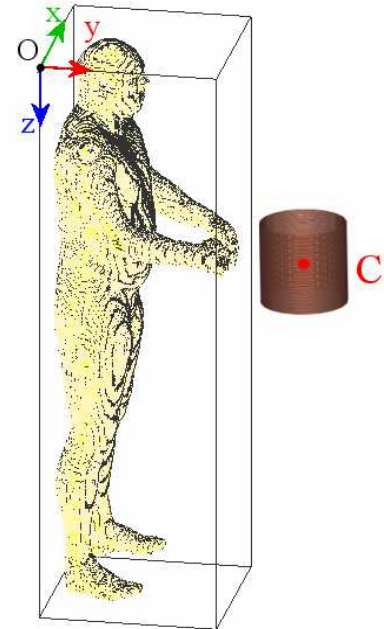


figura 52: esposizione al campo magnetico generato da un fornello a induzione utilizzato nella industria orafa

	 J max [mA/m²]
Bladder	40
Hands (Cartilage)	111
CerebroSpinalFluid	113
Colon	108
Arms (Muscle)	235
Pancreas	51
Small Intestine	202
GallBladder	142
Stomach	95

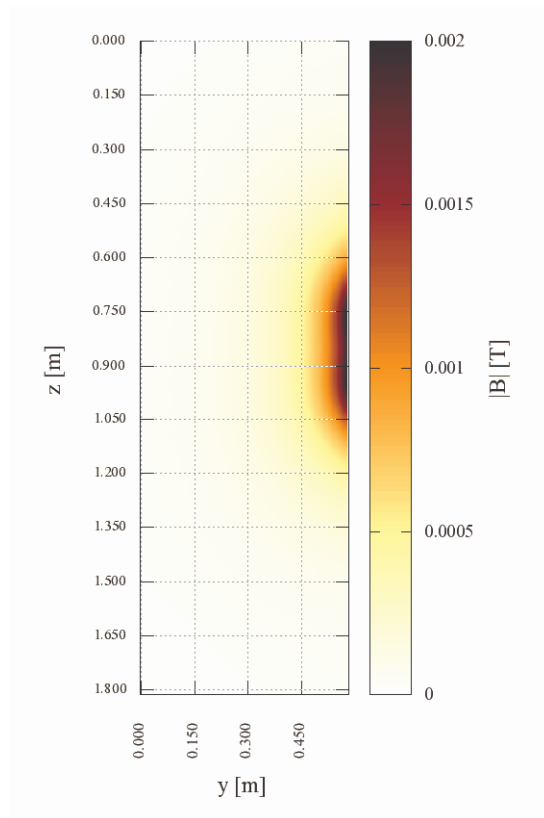


figura 53: induzione magnetica, sezione sagittale
 $x=0,3$ m

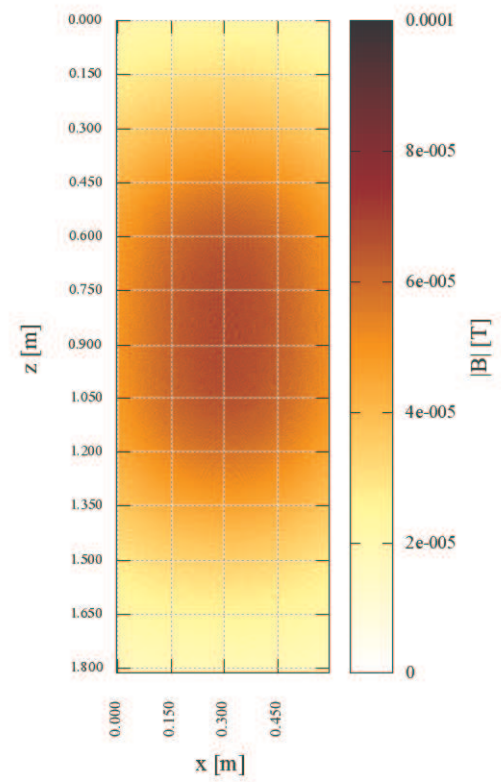


figura 54: induzione magnetica, sezione coronale
 $y=0,15$ m

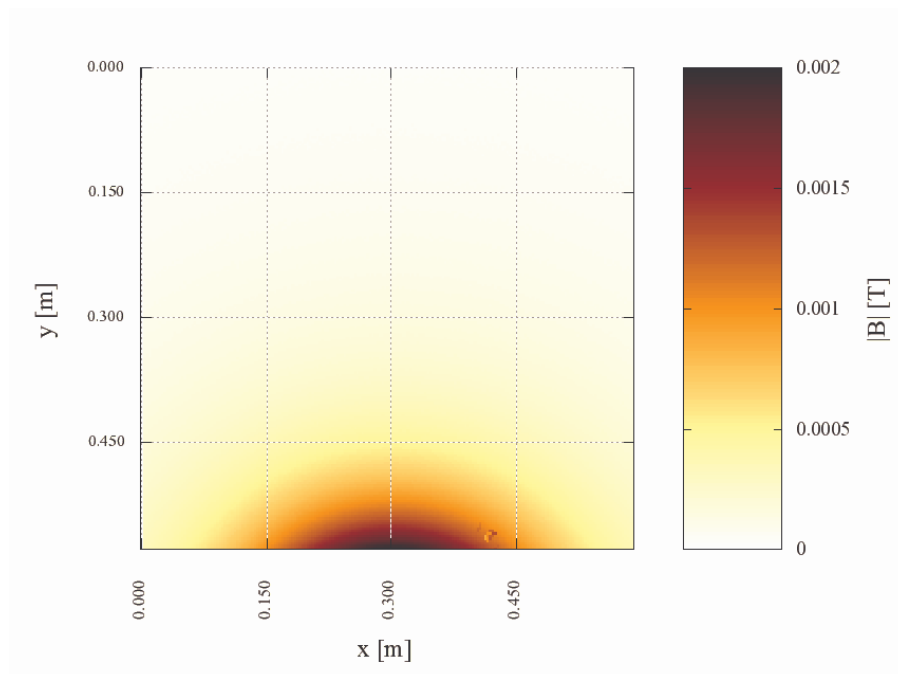


figura 55: induzione magnetica, sezione assiale
 $z=0,85$ m

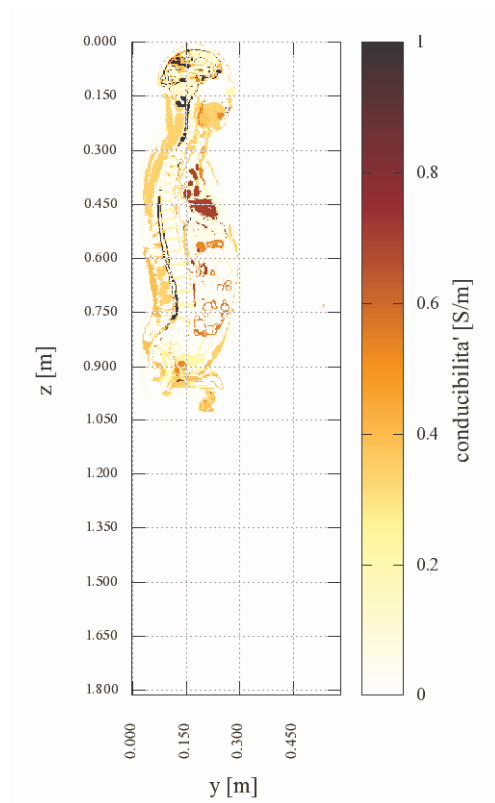


figura 56: conducibilità su sezione sagittale
 $x=0,3\text{m}$, $f=3450\text{ Hz}$

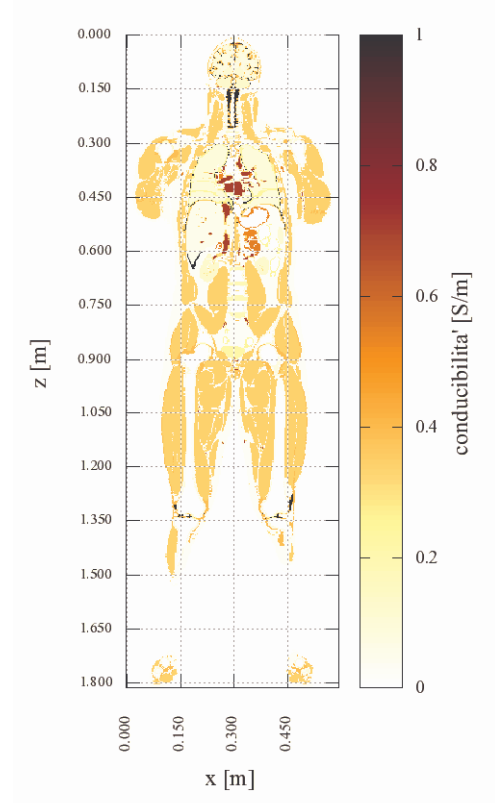


figura 57: conducibilità su sezione coronale
 $y=0,15\text{m}$, $f=3450\text{ Hz}$

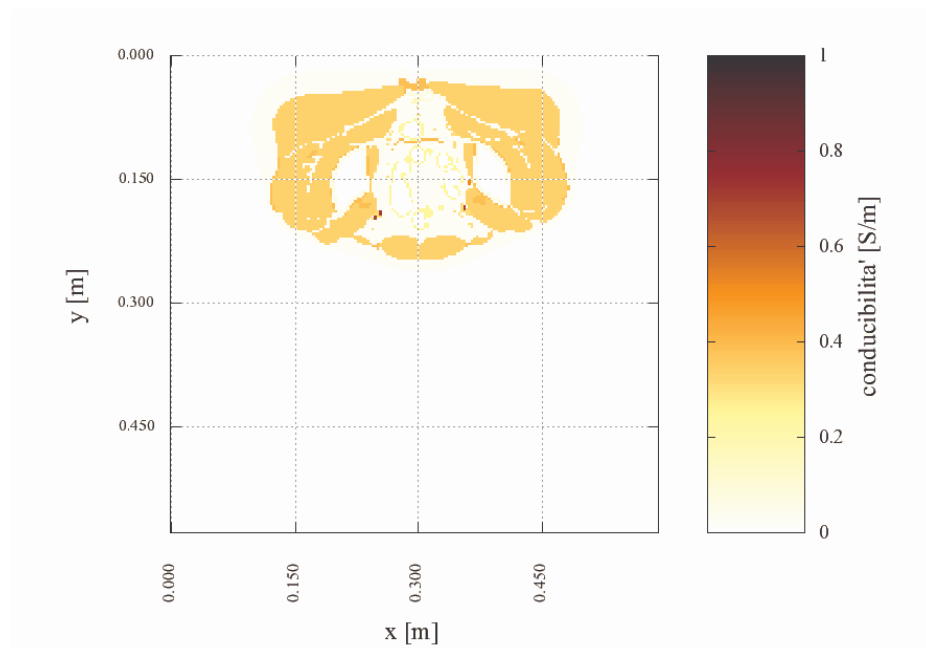


figura 58: conducibilità su sezione assiale
 $z=0,85\text{ m}$, $f=3450\text{ Hz}$

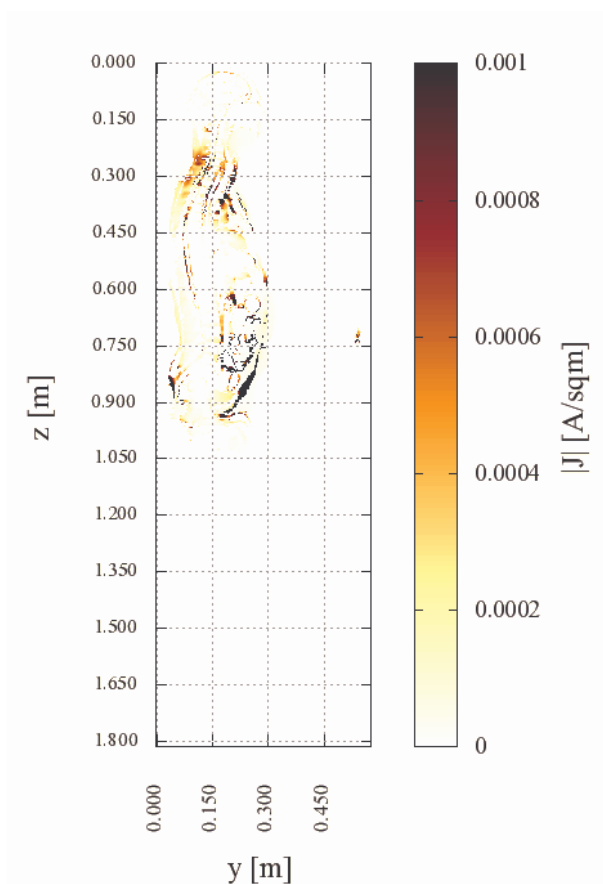


figura 59: densità di corrente su sezione sagittale
 $x=0,3\text{m}$

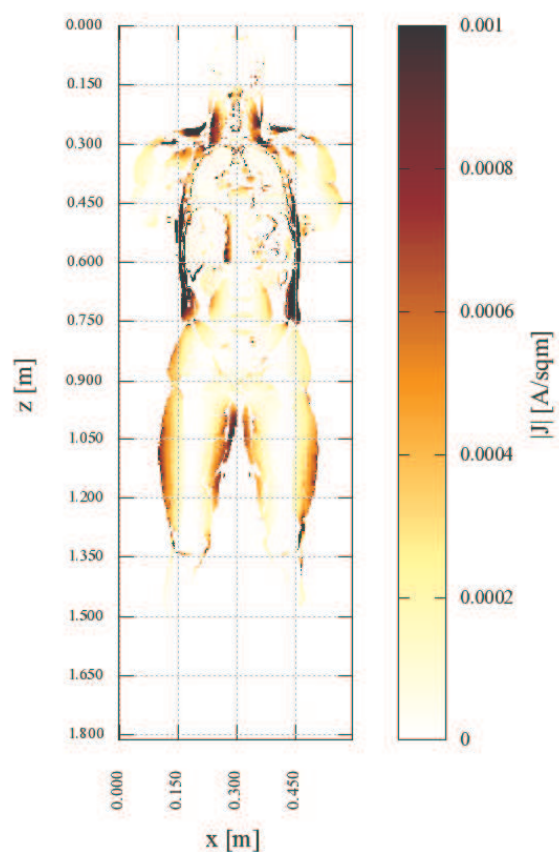


figura 60: densità di corrente su sezione coronale
 $y=0,15\text{m}$

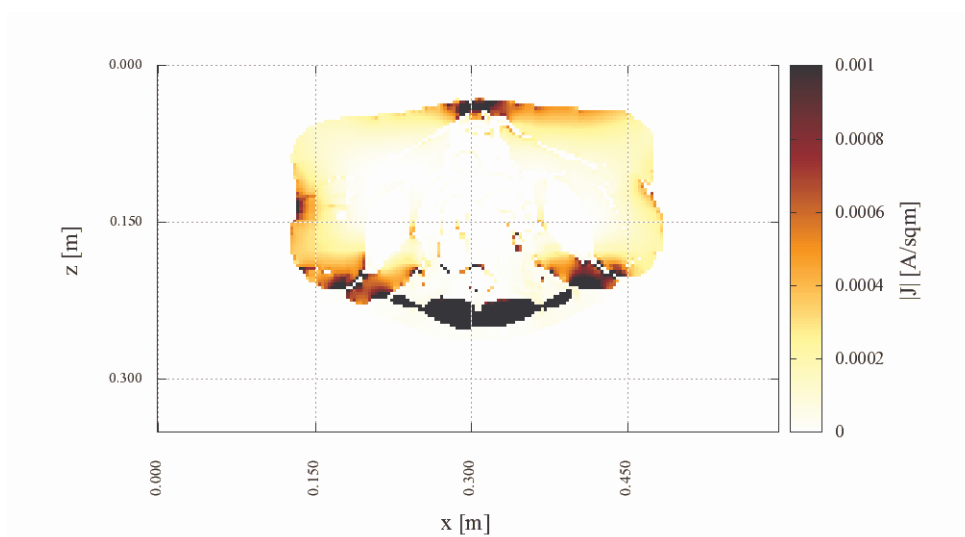


figura 61: densità di corrente su sezione assiale $z=0,85\text{ m}$

6.2 ESPOSIZIONE AL CAMPO ELETTRICO E MAGNETICO GENERATI DA UNA LINEA ELETTRICA

Il secondo caso presentato è relativo all'esposizione al campo elettrico e magnetico generato da una linea elettrica ad alta tensione, nel caso in cui il soggetto esposto sia molto vicino ai conduttori, come avviene ad esempio nelle stazioni e nelle sottostazioni elettriche. Si è scelto di utilizzare il modello con le caviglie articolate, in modo da poter rappresentare correttamente il contatto a terra nel caso in cui il lavoratore usi scarpe conduttive, uno dei possibili equipaggiamenti usati dai lavoratori nelle stazioni elettriche. E' stato risolto anche il caso di soggetto isolato ma non viene presentato in questa sede. La figura 62 rappresenta le condizioni di esposizione. In particolare il conduttore più vicino si trova un metro sopra alla testa del soggetto esposto.

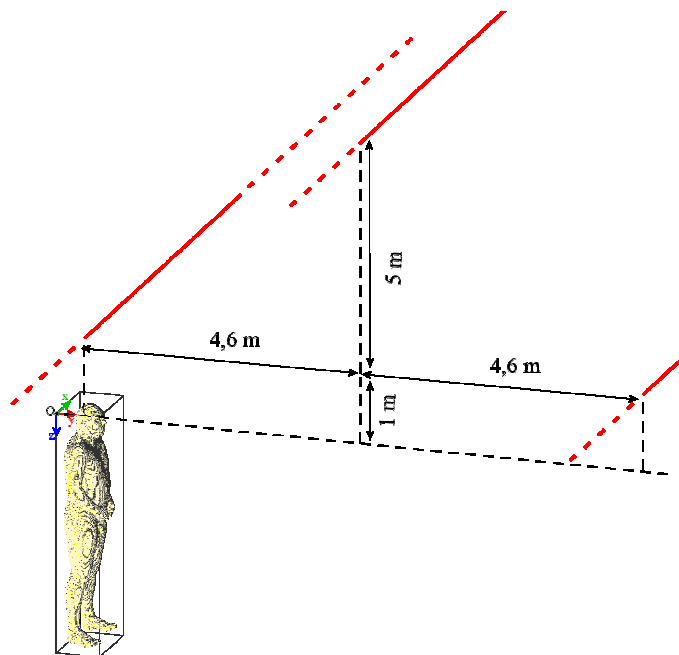


figura 62: Il modello della sorgente e quello dell'organismo

6.2.1 Modellazione delle sorgenti

Per calcolare l'induzione magnetica ed il campo elettrico generato da una linea ad alta tensione si utilizza il classico modello con conduttori rettilinei ed indefiniti. Anche se esistono modelli più accurati, tale modello è di fatto uno standard per la valutazione dell'esposizione ai campi generati da questo tipo di sorgenti. In questa sede ci si è limitati al modello più semplice perché ci si voleva concentrare sul calcolo della densità di corrente.

La sorgente presa in considerazione è una *linea elettrica trifase*. Ciò significa che ciascuno dei tre conduttori è caratterizzato da una tensione e da una corrente non reciprocamente in fase nel tempo. Si suppone inoltre che la linea sia *bilanciata*, cioè che le correnti sui tre conduttori abbiano la medesima intensità e siano sfasate di 120 gradi elettrici l'una rispetto alle altre. La tensione nominale della linea, cioè il valore efficace della differenza di potenziale tra un conduttore e l'altro è pari a 380 kV mentre per la corrente si è scelto il massimo valore che può scorrere in regime continuativo su una tipologia standard di conduttore (alluminio-acciaio con diametro di 31,5 mm in fascio trinato), pari a 2955 A.

6.2.2 Polarizzazione dei campi e scomposizione del problema

Per una sorgente con le caratteristiche descritte nel paragrafo precedente, sia il campo elettrico, sia il campo magnetico hanno polarizzazione ellittica. Ciò significa che sia i campi sia la densità di corrente sono rappresentabili con un vettore a componenti complesse ovvero con la seguente notazione:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_p + j \vec{B}_q \\ \vec{E} &= \vec{E}_p + j \vec{E}_q \\ \vec{J} &= \vec{J}_p + j \vec{J}_q\end{aligned}\tag{6.3}$$

dove si è definito una componente "in fase", indicata con il pedice p , ed una "in quadratura", con pedice q . Grazie al fatto che, sia per il problema interno sia per quello esterno, i coefficienti delle equazioni delle celle sono numeri reali, è possibile eseguire i calcoli separatamente per le componenti in fase ed in quadratura. Si compongono poi i risultati in fase di post processing, secondo gli schemi rappresentati in figura 63, dove si prende in considerazione sia l'esposizione al campo magnetico (parte superiore della figura), sia quella al campo elettrico (parte inferiore).

6.2.3 Esposizione al campo magnetico

A 50 Hz il valore di azione per l'induzione magnetica è pari a 500 μT . L'induzione magnetica generata dalla linea trifase assume la distribuzione rappresentata in figura 64; in particolare si ha che il valore di azione viene superato nella porzione superiore del volume occupato dal modello di organismo. Le mappe della densità di corrente indotta, rappresentate in figura 65 ed in figura 66, evidenziano come questa tenda a scorrere nel più ampia spira che può essere individuata nell'organismo esposto, sul piano ortogonale alla direzione dominante del campo impresso, che in questo caso risulta essere la direzione y .

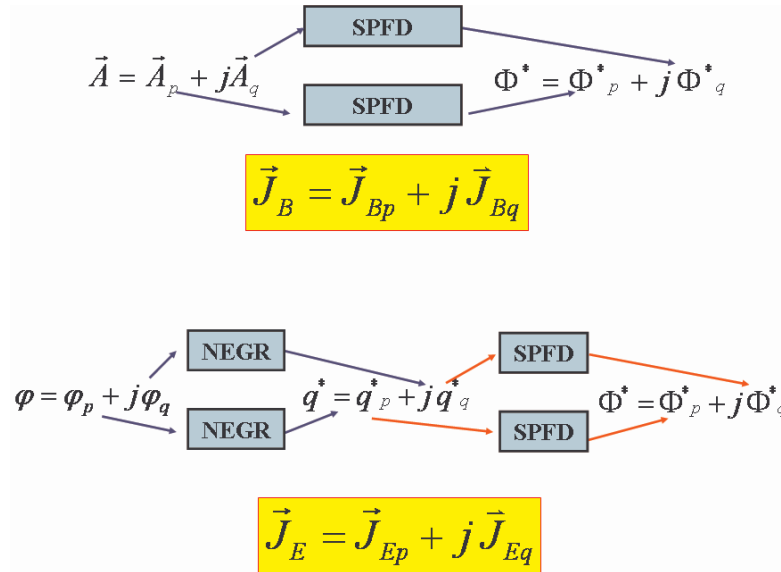
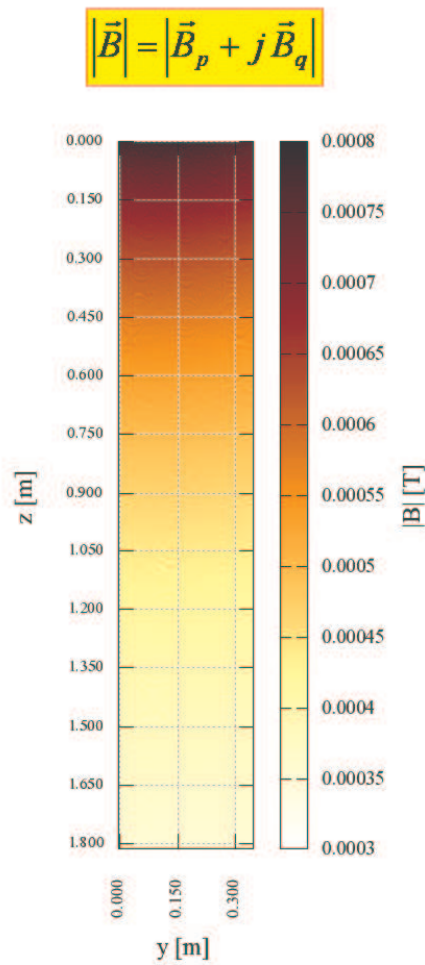


figura 63: schema dei calcoli nel caso di polarizzazione non lineare


 figura 64: induzione magnetica sulla sezione sagittale $y=0,15$ m

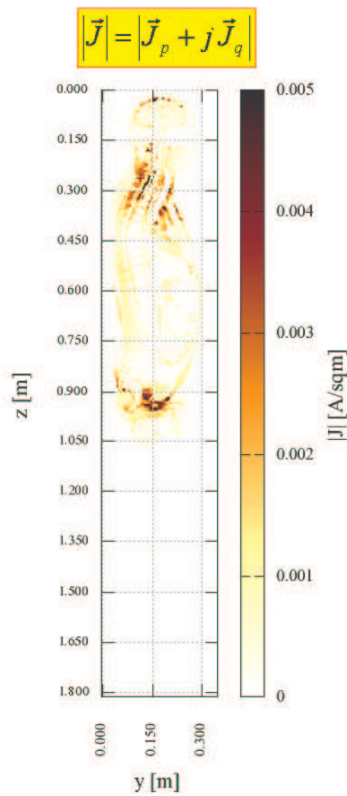


figura 65: sezione sagittale x=0,3 m

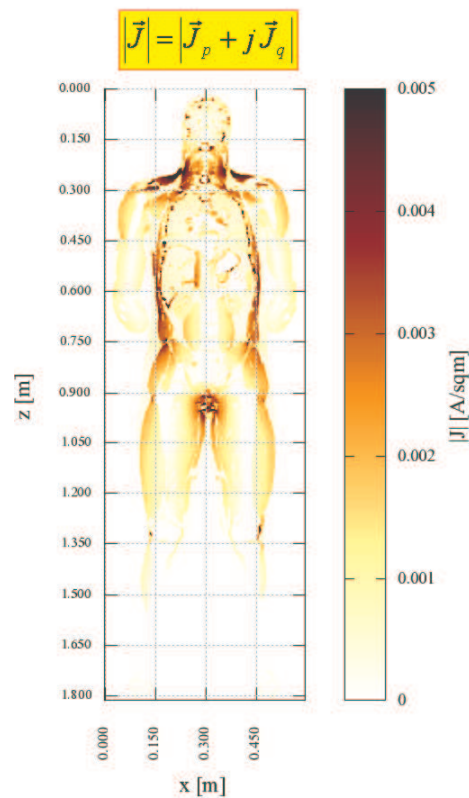


figura 66: sezione coronale y=0,15 m

6.2.4 Esposizione al campo elettrico

Nella figura 67 è rappresentata la distribuzione di campo elettrico imperturbato nel particolare caso trattato.

In figura 68 è rappresentato l'andamento della carica indotta nelle celle che compongono la superficie, calcolata risolvendo il problema esterno, nel caso del campo impresso rappresentato nella precedente figura. In particolare, la linea irregolare a tratto più leggero e che tende a 0 per z crescenti, rappresenta la carica indotta nella sezione assiale con coordinata z e spessore pari ad una cella. La linea più marcata rappresenta invece l'integrale tra 0 e z dell'altra curva e quindi la carica totale indotta per coordinata minore di z . Tale curva tende al valore della carica totale indotta dal campo elettrico sull'intero organismo esposto. La figura 68 si riferisce alla sola parte in quadratura della carica indotta; per la parte in fase e per la carica totale si ottengono andamenti simili.

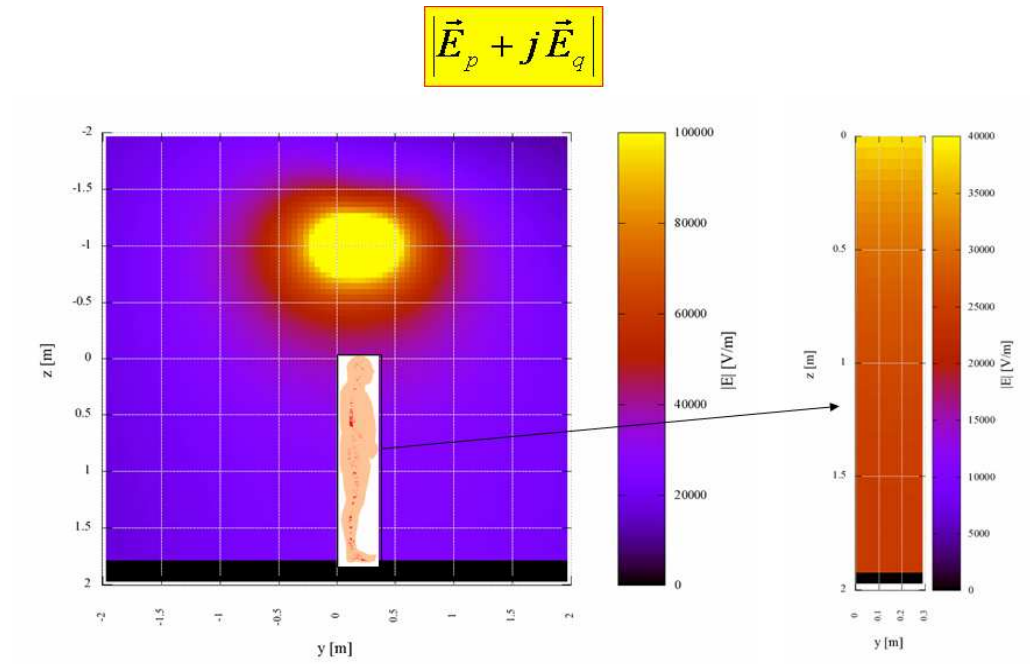


figura 67: Esposizione al campo elettrico

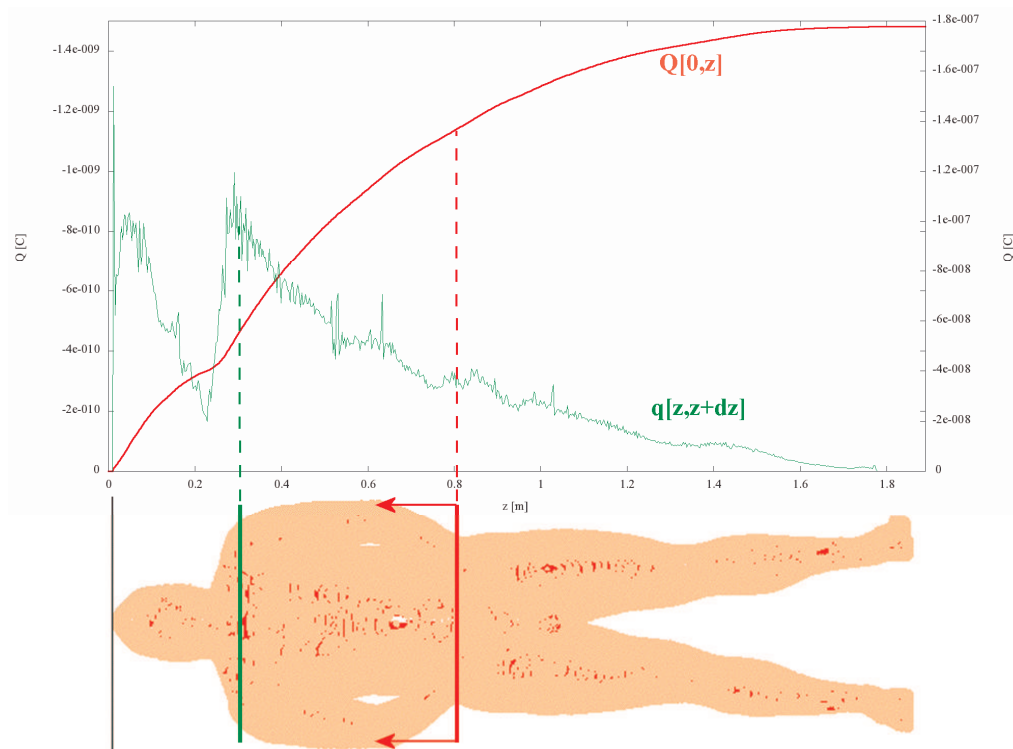


figura 68: Carica indotta dal campo elettrico nel caso “grounded”

Nella figura 69, figura 70 e figura 71 è rappresentata la distribuzione della densità di corrente indotta dal campo elettrico. Come si può notare questa è molto diversa rispetto al caso di esposizione al solo campo magnetico. In particolare, la corrente non scorre su delle spire chiuse ma

fluisce a terra attraverso i piedi, dando luogo ad alte densità nelle caviglie, dove la sezione disponibile è minore.

$$|\vec{J}| = |\vec{J}_p + j\vec{J}_q|$$

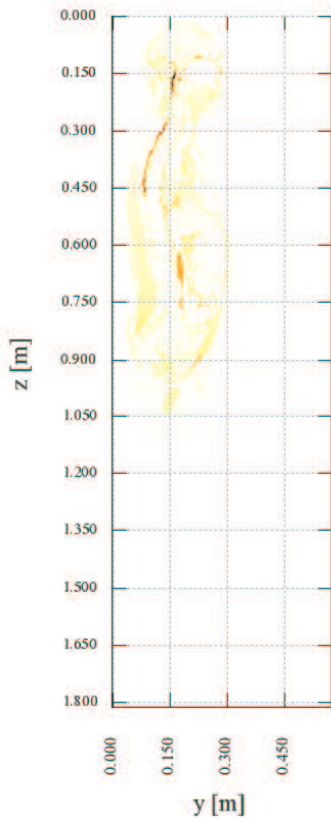


figura 69: sezione sagittale
x=0,3 m

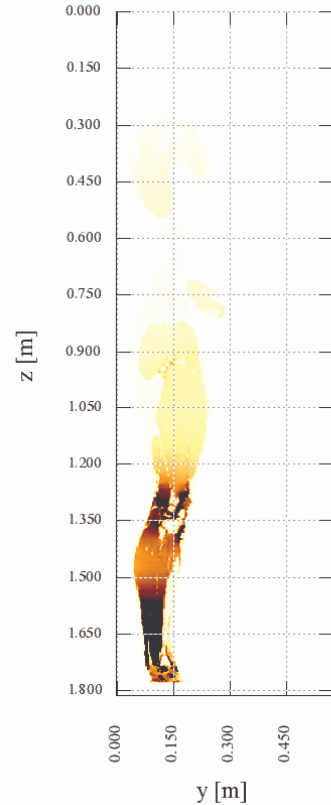


figura 70: sezione sagittale
x=0,15 m

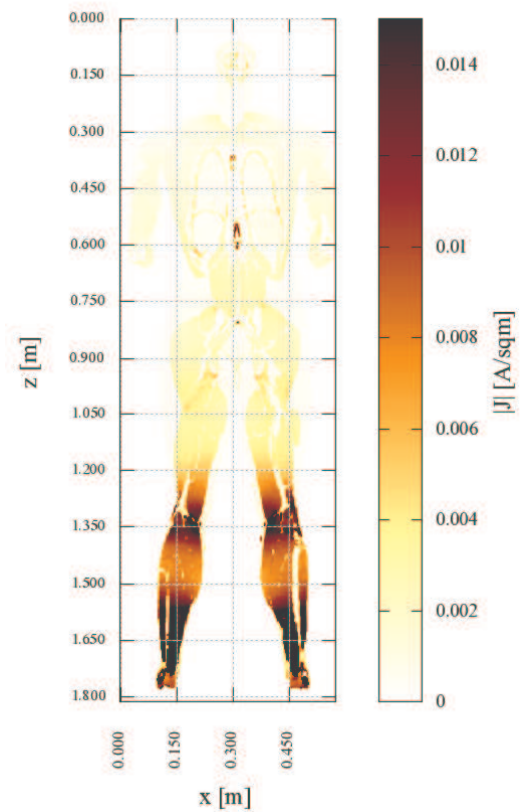


figura 71: sezione coronale
y=0,10 m

6.2.5 Composizione delle correnti indotte dal campo elettrico e campo magnetico

La normativa internazionale prescrive di considerare *separatamente* l'esposizione al campo elettrico e quella al campo magnetico. Ciò è probabilmente dovuto al fatto che non sempre è possibile determinare la relazione di fase tra il campo elettrico ed il campo magnetico e quindi non è possibile comporre correttamente le relative densità di corrente. Nel caso di una linea ad alta tensione però è ragionevole supporre che su ciascun conduttore la corrente sia in fase con la tensione ed è quindi possibile stabilire la relazione di fase tra campo elettrico e magnetico in un generico punto e, conseguentemente, comporre le densità di corrente tenendo conto delle relative fasi.

Riferendosi alla notazione introdotta in figura 63, si determina quindi la densità di corrente totale, dovuta sia al campo elettrico, sia al campo magnetico utilizzando la seguente espressione:

$$\vec{J} = \vec{J}_B + \vec{J}_E = (\vec{J}_{Bp} + \vec{J}_{Ep}) + j(\vec{J}_{Bq} + \vec{J}_{Eq}) \quad (6.4)$$

Le seguenti figure rappresentano la distribuzione di densità di corrente totale in due sezioni coronali. Si può notare come la corrente indotta dal campo elettrico in alcune zone tenda a sottrarsi a quella indotta dal campo magnetico mentre in altre tenda a sommarsi ad essa, secondo lo schema di figura 74.

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_E + \vec{J}_B = (\vec{J}_{Bp} + \vec{J}_{Ep}) + j(\vec{J}_{Bq} + \vec{J}_{Eq})$$

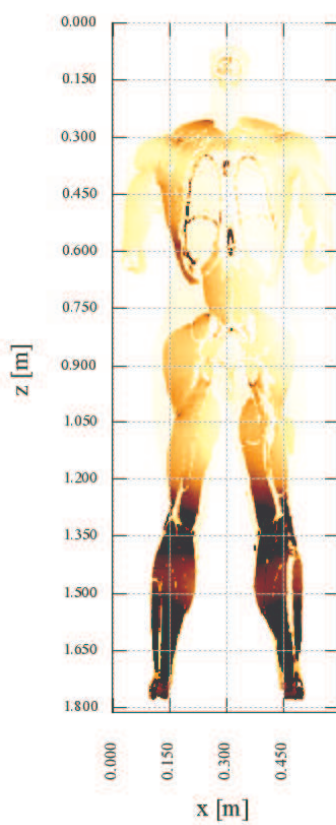


figura 72: sezione coronale
y=0,10 m

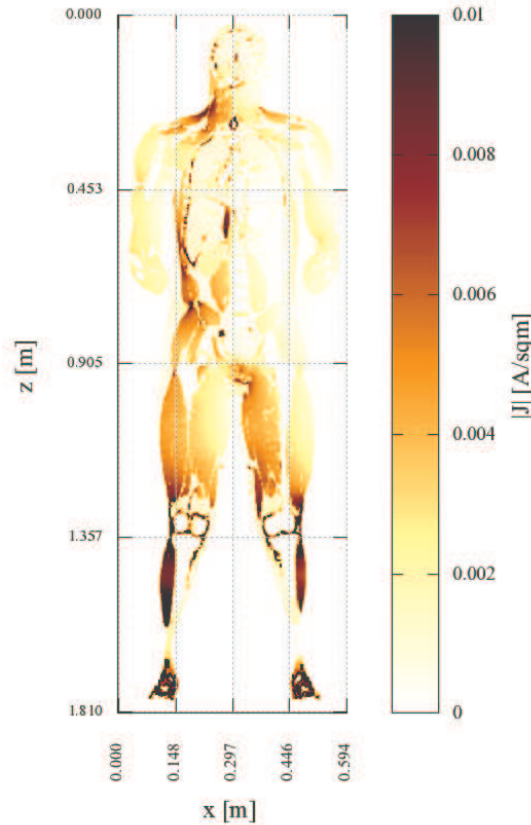


figura 73: sezione coronale
y=0,15 m



figura 74: composizione delle
correnti indotte

CONCLUSIONI

Sin dalla stesura del progetto si è cercato di dare allo studio da svolgere un taglio il più possibile concreto. In particolare si desiderava sviluppare strumenti in grado di rispondere ad esigenze realmente avvertite dalla comunità scientifica e dagli enti che operano nel settore. Lo spunto è stato dato dall'emanazione della Direttiva Europea 2004/40/CE sulle prescrizioni minime da adottare per la protezione dei lavoratori che si trovino ad operare in ambienti caratterizzati da campi elettromagnetici di forte intensità.

Si è scelto di limitarsi al caso delle basse frequenze, sia perché gli strumenti commerciali disponibili sono prevalentemente orientati alle alte frequenze mentre mancano strumenti specificamente dedicati alle frequenze basse, sia perché in questo intervallo di frequenza operano alcune delle più significative sorgenti in ambito occupazionale; basti pensare al trasporto e distribuzione dell'energia elettrica, alla trazione elettrica e all'utilizzo di forni a induzione nell'industria siderurgica e manifatturiera.

Si avevano a disposizione due possibilità: la prima era quella di concentrarsi sugli aspetti strettamente elettromagnetici, utilizzando soluzioni sviluppate da altri per trattare gli aspetti di contorno; l'altra, più ambiziosa, era quella di creare un sistema di strumenti integrati che permettesse di affrontare il problema nella sua interezza. Si è scelta questa seconda strada, mirando inizialmente ad un approccio che privilegiasse la massima semplicità, ed in seguito, laddove è stato possibile, approfondendo ed ottimizzando le soluzioni di base.

La semplicità dell'approccio è associata al fatto che tutte le applicazioni sviluppate sono state realizzate utilizzando come strumento di sviluppo principale il compilatore c++, senza fare riferimento ad ambienti di calcolo integrati. Tale scelta non è stata dettata da ragioni di principio ma piuttosto dal fatto che le dimensioni dei problemi affrontati rendevano sconsigliabile l'utilizzo di strumenti che non permettessero il pieno controllo delle risorse di calcolo e di memoria a disposizione.

Si è inoltre cercato di creare un sistema modulare, in cui il problema venisse affrontato mediante l'utilizzo di diversi moduli, ciascuno dei quali fosse mirato alla soluzione di una specifica parte, e definendo un protocollo di comunicazione tra di essi in modo che i risultati di ciascuna applicazione potessero essere utilizzati come dati in ingresso per altre.

La semplicità, la modularità e l'approccio a basso livello fanno sì che il sistema risulti facilmente sviluppabile e questa era una delle caratteristiche a cui si era maggiormente interessati, visto che non ci si voleva precludere la possibilità di ulteriori sviluppi legati ad attività future.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Directive 2004/40/EC of the European Parliament and of the Council of 29 April 2004 on the minimum health and safety requirements regarding the exposure of workers to the risks arising from physical agents (electromagnetic fields). Official Journal of the European Union - L 184 - Volume 47 - 24 May 2004.
- [2] ICNIRP (International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection): "Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz)", Health Physics, Vol.74, N.4 (April 1998), pages 494-522.
- [3] P.J. Dimbylow: "The development of realistic voxel phantoms for electromagnetic field dosimetry", Proceedings of the International Workshop on Voxel Phantom Development (National Radiological Protection Board Report, 1996) pages 1-7.
- [4] C. Gabriel: "Compilation of the dielectric properties of body tissues at RF and microwave frequencies", Report N.AL/OE-TR- 1996-0037, Occupational and environmental health directorate, Radiofrequency Radiation Division, Brooks Air Force Base, Texas (USA), June 1996. Scaricabile da <http://www.brooks.af.mil/AFRL/HED/hedr/reports/dielectric/home.html> oppure da <http://niremf.ifac.cnr.it/docs/DIELECTRIC/home.html> (copia autorizzata).
- [5] C. Gabriel, S.Gabriel and E.Corthout: "The dielectric properties of biological tissues: I.Literature survey", Physics in Medicine & Biology, Vol.41 (1996), pages 2231-2249.
- [6] S. Gabriel, R.W.Lau and C.Gabriel: "The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz", Physics in Medicine & Biology, Vol.41 (1996), page 2251-2269.
- [7] S. Gabriel, R.W.Lau and C.Gabriel: "The dielectric properties of biological tissues: III. Parametric models for the dielectric spectrum of tissues", Physics in Medicine & Biology Vol.41 (1996), pages 2271-2293.
- [8] Federal Communications Commission (USA): "Tissue Dielectric Properties", <http://www.fcc.gov/cgi-bin/dielec.sh>
- [9] Istituto di Fisica Applicata "Nello Carrara" del Consiglio Nazionale delle Ricerche: "Dielectric Properties of Body Tissues", <http://niremf.ifac.cnr.it/tissprop/>
- [10] C.H. Durney: "Electromagnetic dosimetry for models of humans and animals: a review of theoretical and numerical techniques", Proceedings of the IEEE, Vol.68, N.1 (January 1980), pages 33-40.
- [11] R.J. Spiegel: "A review of numerical models for predicting the energy deposition and resultant thermal response of humans exposed to electromagnetic fields", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol.MTT-32, No.8 (August 1984), pages 730-746.
- [12] D.Andreuccetti, M.Bini e N.Rubino: "Considerazioni sugli standard di esposizione elettromagnetica per frequenze fra 100 kHz ed 1MHz", Atti della VI Riunione Nazionale di Elettromagnetismo Applicato, Trieste, Ottobre 1986.
- [13] D.Andreuccetti: "Dosimetria dei campi elettrici e magnetici di bassa frequenza", Report IROE N.TR/POE/89.28, Firenze, Dicembre 1989.
- [14] D.Andreuccetti, M.Bini, A.Ignesti, R.Olmi e R.Vanni: "Considerazioni per uno standard di esposizione a campi elettromagnetici di bassa frequenza", Report IROE N.TR/POE/89.29, Firenze, Dicembre 1989.
- [15] D.Andreuccetti: "Proposte per una normativa NIR in Toscana", Atti della Giornata di Studio su "Protezione dalle Radiazioni Non Ionizzanti e Servizio Sanitario in Toscana", San Miniato (PI), Novembre 1989.
- [16] D.Andreuccetti, M.Bini, A.Ignesti, R.Olmi e R.Vanni: "Considerazioni per uno standard di esposizione a campi elettromagnetici di bassa frequenza", Riunione Monotematica della SIRR (Società Italiana per le Ricerche sulle Radiazioni) su "Interazione tra Campi Elettromagnetici e Biosistemi: Effetti non termici, meccanismi e applicazioni", L'Aquila, Ottobre 1990.
- [17] D.Andreuccetti, M.Bini, A.Ignesti, R.Olmi, S.Priori e R.Vanni: "Campi dispersi da una sigillatrice industriale ad induzione: una occasione per riconsiderare i limiti di esposizione a bassa frequenza", Atti della IX Riunione Nazionale di Elettromagnetismo, Assisi (PG), Ottobre 1992.
- [18] D.Andreuccetti, M.Bini, A.Ignesti, R.Olmi, S.Priori and R.Vanni: "Helmholtz coils for the generation of standard magnetic fields in biological applications", Proceedings of the VII National Congress of the AIFB, Monte Conero, Ancona (Italy), June 1992; Physica Medica, Vol.IX, Supplement 1, June 1993, pp.283-285.
- [19] D.Andreuccetti, M.Bini, R.Fossi, A.Ignesti, R.Olmi, S.Priori e R.Vanni: "Dosimetria del campo magnetico a bassissima frequenza: approccio sperimentale e numerico", XXIX Congresso Nazionale AIRP, Trieste, Settembre 1995.
- [20] Roberto Fossi "Dosimetria del campo magnetico a bassissima frequenza: progettazione, realizzazione e calibrazione di un apparato per le misure", Tesi di Laurea in Fisica, Università degli Studi di Firenze, discussa il 28 novembre 1994.
- [21] D.Andreuccetti, R.Fossi e C.Petrucchi: "Esposizione della popolazione ai varchi magnetici: analisi di un caso-tipo", Report IROE N.TR/ICEMM/2.98, Firenze, Giugno 1998, 73 pagine.

- [22] D.Andreuccetti e R.Fossi: "Proprietà dielettriche dei tessuti umani: definizioni, modello parametrico, codici di calcolo", Report IROE N.TR/ICEMM/13.00, Firenze, Settembre 2000, 33 pagine.
- [23] D.Andreuccetti, R.Fossi and C.Petrucchi: "Induced body current assessment: a case-study. Currents induced in people walking through hands-free identification/access control systems (preliminary report)", Proceedings of the III Workshop COST 244 bis (Biomedical Effects of Electromagnetic Fields) on Intermediate frequency range - E.M.F.: 3 kHz-3 MHz, Paris (France), April 1998, pp.73-77.
- [24] D.Andreuccetti, L.Bogi, R.Fossi, F.Francia, G.Giusti e G.Licitra: "Alcuni casi di esposizione ai campi elettromagnetici generati da barriere antitaccheggio", Atti del Convegno Nazionale di Radioprotezione AIRP su "Aspetti scientifici e normativi delle radiazioni non ionizzanti", Napoli, Settembre 1999, pp.63-68.
- [25] D.Andreuccetti: "Sorgenti di campi elettromagnetici dalle bassissime frequenze alle frequenze intermedie", Atti del Convegno Regione Emilia-Romagna e ARPA-ER su "Campi elettromagnetici. Prevenzione, comunicazione, controllo e ricerca", Bologna, Novembre 2000.
- [26] K.S.Cole and R.H.Cole: "Dispersion and absorption in dielectrics: I. Alternating current characteristics.", Journal of Chemical Physics, April 1941, pp.341-351.
- [27] P.J.Dimbylow: "The calculation of induced currents and absorbed power in a realistic, heterogeneous model of the lower leg for applied electric fields from 60 Hz to 30 MHz", Physics in Medicine and Biology, Vol.33 (1988), pages 1453-1468.
- [28] K.M.Chen, H.R.Chuang and C.J.Lin: "Quantification of interaction between ELF-LF electric fields and human bodies", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.BME-33, N.8 (August 1986), pages 746-756.
- [29] H.R.Chuang and K.M.Chen: "A numerical method for the computation of induced currents inside 3-D heterogeneous biological bodies by ELF-LF electric fields", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.BME-36, N.6 (June 1989), pages 628-634.
- [30] O.P.Gandhi, J.F.DeFord and H.Kanai: "Impedance method for calculation of power deposition patterns in magnetically induced hyperthermia", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.BME-31, N.10 (October 1984), pages 644-651.
- [31] J.F.DeFord and O.P.Gandhi: "An impedance method to calculate currents induced in biological bodies exposed to quasi-static electromagnetic fields", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol.EMC-27, N.3 (August 1985), pages 168-173.
- [32] N.Orcutt and O.P.Gandhi: "A 3-D impedance method to calculate power deposition in biological bodies subjected to time varying magnetic fields", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.BME-35, N.8 (August 1988), pages 577-583.
- [33] S.Tofani, P.Ossola, G.d'Amore and O.P.Gandhi, "Electric field and current density distributions induced in an anatomically-based model of the human head by magnetic fields from a hair dryer", Health Physics, Vol.68, N.1 (1995), pages 71-79.
- [34] J.Cheng, M.A.Stuchly, C.DeWagter and L.Martens: "Magnetic field induced currents in a human head from use of portable appliances", Physics in Medicine and Biology, Vol.40 (1995), pages 495-510.
- [35] M.A.Stuchly and S.Zhao: "Magnetic field-induced currents in the human body in proximity of power lines", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.11, N.1 (January 1996), pages 102-109.
- [36] P.J.Dimbylow: "Induced current densities from low-frequency magnetic fields in a 2 mm resolution, anatomically realistic model of the body", Physics in Medicine and Biology, Vol.43 (1998), pages 221-230.
- [37] O.P.Gandhi and G.Kang: "Calculation of induced current densities for humans by magnetic fields from electronic article surveillance devices", Physics in Medicine and Biology, Vol.46 (2001), pages 2759-2771.
- [38] M.Nadeem, Y.Hamnerius, K.H.Mild and M.Persson: "Magnetic field from spot welding equipment. Is the basic restriction exceeded?", Bioelectromagnetics, Vol.25 (2004), pages 278-284.
- [39] K.R.Davey, C.H.Cheng and C.M.Epstein: "Prediction of magnetically induced electric fields in biological tissue", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.BME-38, N.5 (May 1991), pages 418-422.
- [40] M.A.Stuchly and T.W.Dawson: "Human organ and tissue induced currents by 60 Hz electric and magnetic fields", Proceedings of the 19th IEEE/EMBS International Conference, Oct. 30 - Nov. 2, 1997, Chicago (USA).
- [41] T.W.Dawson, K.Caputa and M.A.Stuchly: "A comparison of 60 Hz uniform magnetic and electric induction in the human body", Physics in Medicine and Biology, Vol.42, N.12 (1997), pages 2319-2329.
- [42] P.J.Dimbylow: "Induced current densities from low-frequency magnetic fields in a 2 mm resolution, anatomically realistic model of the body", Physics in Medicine and Biology, Vol.43 (1998), pages 221-230.
- [43] T.W.Dawson and M.A.Stuchly: "High-resolution organ dosimetry for human exposure to low-frequency magnetic fields", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-34, N.3 (May 1998), pages 798-718.
- [44] T.W.Dawson, K.Caputa and M.A.Stuchly: "Numerical evaluation of 60 Hz magnetic induction in the human body in complex occupational environments", Physics in Medicine and Biology, Vol.44 (1999), pages 1025-1040.
- [45] P.J.Dimbylow: "Current densities in a 2 mm resolution anatomically realistic model of the body induced by low frequency electric fields", Physics in Medicine and Biology, Vol.45 (2000), pages 1013-1022.
- [46] J.11] K.Caputa, P.J.Dimbylow, T.W.Dawson and M.A.Stuchly: "Modelling fields induced in humans by 50/60 Hz magnetic fields: reliability of the results and effects of model variations", Physics in Medicine and Biology Vol.47 (2002), pages 1391-1398.

-
- [47] P.J.Dimbylow: "Development of the female voxel phantom, NAOMI, and its application to calculations of induced current densities and electric fields from applied low frequency magnetic and electric fields", *Physics in Medicine and Biology*, Vol.50 (2005), pages 1047–1070.
- [48] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, B.F.Flannery; "Numerical recipes in C: the art of scientific computing", Cambridge University Press, Second edition, 1992, pp. 78-79.
- [49] J.A.Stratton "Electromagnetic theory" McGrawHill, New York and London, 1941, pp205-207
- [50] C.H.Durney, C.C.Johnson and H.Massoudi: "Long-wavelength analysis of plane wave irradiation of a prolate spheroid model of man", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol.MTT-23, N.2 (February 1975), pages 246-253.
- [51] C.C.Johnson, C.H.Durney and H.Massoudi: "Long-wavelength electromagnetic power absorption in prolate spheroidal models of man and animals", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol.MTT-23, N.9 (September 1975), pages 739-748.
- [52] H.Massoudi, C.H.Durney and C.C.Johnson: "Long-wavelength analysis of plane wave irradiation of an ellipsoidal model of man", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol.MTT-25, N.1 (January 1977), pages 41-46.
- [53] H.Massoudi, C.H.Durney and C.C.Johnson: "Long-wavelength electromagnetic power absorption in ellipsoidal models of man and animals", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol.MTT-25, N.1 (January 1977), pages 47-52.
- [54] T.W.Dawson and M.A.Stuchly: "Analytic validation of a three-dimensional scalar-potential finite-difference code for low-frequency magnetic induction", *ACES (Applied Computational Electromagnetics Society) Journal*, Vol. 11, N.3 (1996), pages 72-81.
- [55] J.C.Lin, A.W.Guy and C.C.Johnson: "Power deposition in a spherical model of man exposed to 1-20 MHz electromagnetic fields", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol.MTT-21, N.12 (December 1973), pages 791-797.

APPENDICI

A PROPRIETÀ DIELETTRICHE DERIVATE

La costante dielettrica relativa complessa $\hat{\epsilon}$ che si calcola con il modello parametrico di cui si è parlato nel secondo capitolo della tesi, può essere considerata come la grandezza dielettrica primaria di un tessuto biologico. In questa appendice vogliamo definire e calcolare alcune delle proprietà dielettriche derivate: la tangente di perdita γ , la lunghezza d'onda λ e la profondità di penetrazione δ .

L'espressione della costante dielettrica relativa complessa è la seguente:

$$\hat{\epsilon} = (\omega \epsilon_0 \epsilon + j\sigma) \quad (\text{A.1})$$

La tangente di perdita γ è data semplicemente dal rapporto tra i valori assoluti della parte immaginaria e della parte reale della costante dielettrica complessa:

$$\tan \gamma = \frac{|\text{Im}(\hat{\epsilon})|}{|\text{Re}(\hat{\epsilon})|} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \quad (\text{A.2})$$

Per definire le altre grandezze derivate, partiamo dalle equazioni che descrivono la propagazione del campo elettromagnetico in un mezzo omogeneo e isotropo, dielettrico con perdite, privo di sorgenti, magneticamente trasparente e con costante dielettrica relativa complessa $\hat{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= j\omega \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega \mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Applicando l'operatore vettoriale rotore alla seconda equazione e sostituendovi la prima si ottiene:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \hat{\epsilon} \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (\text{A.4})$$

dove:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \hat{\epsilon} \quad (\text{A.5})$$

In assenza di sorgenti la divergenza del campo elettrico è nulla e quindi la (A.4) diventa:

$$\nabla^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Considerando per semplicità un campo polarizzato in direzione x e propagatesi in direzione z il campo elettrico può essere scritto:

$$\vec{E} = \hat{x} E_x(z, t) \quad (\text{A.7})$$

Sostituendo la (A.7) nella (A.6) si ottiene la seguente:

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_x = 0 \quad (\text{A.8})$$

Come è noto una possibile soluzione della precedente equazione ha la seguente espressione:

$$E_x(z, t) = E_0 e^{\omega t} e^{\pm jkz} \quad (\text{A.9})$$

dove compare esplicitamente la dipendenza dal tempo di tipo armonico sinusoidale.

Il numero complesso k definito dalla (A.5) può essere rappresentato senza perdere in generalità, con la seguente espressione:

$$k = \beta - j\alpha \quad (\text{A.10})$$

e sostituendo la precedente nella (A.9) si ottiene:

$$E_x(z, t) = E_0 e^{j(\alpha \pm \beta z)} e^{\pm \alpha z} \quad (\text{A.11})$$

In base a questa ultima espressione è possibile definire la *lunghezza d'onda* λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{A.12})$$

e la *profondità di penetrazione* δ :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{A.13})$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (A.10) ed utilizzando la (A.5) e la (A.1)

$$\begin{aligned} k^2 &= (\beta - j\alpha)^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2j\alpha\beta \\ k^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

e sviluppando ulteriormente:

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \\ 2\alpha\beta &= \omega \mu_0 \sigma \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Utilizzando la (A.13) e la (A.14), facendo comparire i parametri λ e δ a cui siamo interessati si ha:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\delta^2} &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \\ \frac{4\pi}{\delta \lambda} &= \omega \mu_0 \sigma \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Riorganizziamo le precedenti utilizzando l'identità $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ed elevando al quadrato entrambi i membri della seconda equazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^2} &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \\ \frac{16\pi^2}{\delta^2 \lambda^2} &= \omega^2 \mu_0^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si ricava:

$$\frac{16\pi^2}{\lambda^2} \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) = \omega^2 \mu_0^2 \sigma^2 \quad (\text{A.18})$$

Definendo $y = 1/\lambda^2$ si ottiene una equazione di secondo grado in forma canonica:

$$64\pi^4 c^2 y^2 - 16\pi^2 \omega^2 \varepsilon y - \omega^2 \mu_0^2 \sigma^2 c^2 = 0 \quad (\text{A.19})$$

L'unica soluzione positiva di tale equazione ha espressione:

$$\frac{1}{\lambda^2} = y = \frac{\omega^2 \varepsilon}{8\pi^2 c^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{c^4 \mu_0^2 \sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \right] \quad (\text{A.20})$$

Sostituendo le seguenti espressioni nella (A.20):

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \\ c^4 &= \frac{1}{\varepsilon_0^2 \mu_0^2} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

si ottiene:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\varepsilon}{2\lambda_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon^2}} \right] \quad (\text{A.22})$$

E si giunge quindi all'espressione per la lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon^2}} \right]}} \quad (\text{A.23})$$

Per determinare l'espressione della profondità di penetrazione δ si sostituisce la seconda delle (A.21) nella (A.20) e si ottiene:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon}{8\pi^2 c^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon^2}} \right] \quad (\text{A.24})$$

Sostituendo questa espressione nella prima delle (A.17) si ottiene:

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon}{2c^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon^2}} \right] - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = \frac{\omega^2 \varepsilon}{2c^2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon^2}} - 1 \right] \quad (\text{A.25})$$

Ed infine si ottiene l'espressione per la profondità di penetrazione δ :

$$\delta = \frac{c}{\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon^2}} - 1 \right]}} \quad (\text{A.26})$$

Per concludere si osserva che se il materiale può essere considerato come un buon conduttore e cioè se risulta $\sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon$ allora le espressioni (A.23) e (A.26) possono essere semplificate come segue:

$$\begin{aligned}\delta &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu_0}} \\ \lambda &\approx \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \sigma \mu_0}} = 2\pi\delta\end{aligned}\tag{A.27}$$