



CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

**ISTITUTO DI FISICA APPLICATA
"NELLO CARRARA"
FIRENZE - ITALY**

**MODELLAZIONE DEI CONDUTTORI DI UN ELETTRODOTTO
AEREO:
LA CATENARIA**

IFAC TECHNICAL REPORT N. TR/AEL/08.03

N. Zoppietti
D. Andreuccetti

ISSN 1120-2823

Settembre 2003

Modellazione dei conduttori di un elettrodotto aereo: la catenaria

N. Zopetti, D. Andreuccetti

Catenaria è il nome del luogo dei punti lungo cui si dispone una fune pesante, omogenea, inestensibile e perfettamente flessibile, sospesa per i suoi estremi e soggetta unicamente al proprio peso; queste condizioni sono soddisfatte con grande approssimazione dai conduttori delle linee elettriche aeree, per i quali la condizione di flessibilità è assicurata dalla grande lunghezza dei cavi in relazione al loro diametro.

Nel primo capitolo di questo documento si espone come l'equazione di questa curva possa essere dedotta dai principi generali della statica, imponendo le condizioni di equilibrio di ogni elemento di cui è costituita la fune (ciascuno dei quali è assimilato ad un corpo rigido); si analizzano quindi le forme assunte da questa equazione in alcuni particolari sistemi di riferimento bidimensionali.

Nel secondo capitolo si affronta il problema della descrizione della catenaria in un sistema di riferimento tridimensionale, date le coordinate dei punti di sospensione della fune ed un parametro detto *di tesatura*. Nel terzo si tratta dell'influenza delle condizioni ambientali e di esercizio sul parametro di tesatura.

Nel quarto ed ultimo capitolo si descrivono infine alcune delle approssimazioni che vengono più spesso utilizzate in letteratura e manualistica.

1 DESCRIZIONE DELLA CATENARIA SUL PIANO VERTICALE

1.1 L'EQUAZIONE DELLA CURVA SUL GENERICO SISTEMA DI RIFERIMENTO PIANO E VERTICALE

Sul generico elemento $d\vec{P} = \hat{s}ds$ (dove \hat{s} è il versore della curva e s la coordinata curvilinea lungo di essa) agiscono tre forze: la tensione $\vec{T}(s)$ esercitata dal tratto di fune ad un lato dell'elemento, la tensione $\vec{T}(s+ds)$ esercitata dal tratto sull'altro lato e la forza di gravità $-w\hat{z}ds$, dove w [N/m] è il peso per unità di lunghezza della fune e \hat{z} il versore della verticale (diretto verso l'alto). La condizione di equilibrio statico richiede l'annullamento della risultante e del momento risultante delle forze applicate sull'elemento. Questo porta a scrivere le equazioni seguenti:

$$\begin{cases} \vec{T}(s+ds) - \vec{T}(s) - w\hat{z}ds = 0 \\ (P + d\vec{P} - O) \times \vec{T}(s+ds) - (P - O) \times \vec{T}(s) - (P - O) \times w\hat{z}ds = 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Con semplici procedure di calcolo differenziale vettoriale, queste due equazioni portano alle seguenti:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{T}(s)}{ds} - w\hat{z} = 0 \\ (P-O) \times \frac{d\vec{T}(s)}{ds} ds + d\vec{P} \times \vec{T}(s) - (P-O) \times w\hat{z} ds = 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Ovvero, sostituendo la prima nella seconda ed utilizzando anche la definizione $d\vec{P} = \hat{s} ds$:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{T}(s)}{ds} = w\hat{z} \\ \hat{s} \times \vec{T}(s) = 0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Prima di proseguire, osserviamo come la prima delle due relazioni (1.1.3) esprima il fatto che **la forza di tensione $\vec{T}(s)$ giace su di un piano verticale**; se infatti se ne moltiplicano ambo i membri vettorialmente per \hat{z} , si giunge facilmente a trovare:

$$\vec{T}(s) \times \hat{z} = \vec{C} \quad (1.1.4)$$

dove \vec{C} è un vettore costante; quindi, al variare della coordinata curvilinea s il piano individuato dai vettori \vec{T} e \hat{z} (un piano sicuramente verticale) si mantiene costante, come volevasi dimostrare. Siccome dalla seconda delle due equazioni (1.1.3) si deduce che **la forza di tensione $\vec{T}(s)$ è ovunque parallela alla curva cercata**, ne consegue che **la catenaria giace su un piano verticale**.

Preso su tale piano un sistema di riferimento (ξ, z) con asse ξ orizzontale, per trovare la forma $z = z(\xi)$ dell'espressione della catenaria si proietti sui due assi coordinati la prima delle equazioni (1.1.3); si ottiene subito:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} [\vec{T}(s) \cdot \hat{\xi}] = 0 \\ \frac{d}{ds} [\vec{T}(s) \cdot \hat{z}] = w \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Dalla prima di queste equazioni deduciamo che la componente orizzontale della tensione $\vec{T}(s)$ si mantiene costante lungo la linea; indicando con H [N] tale costante e ricordando che, per quanto si è visto, si può scrivere:

$$\begin{cases} \vec{T}(s) = T(s)\hat{s} \\ \hat{s} \cdot \hat{\xi} = \frac{d\xi}{ds} \\ \hat{s} \cdot \hat{z} = \frac{dz}{ds} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

e che quindi:

$$\begin{cases} \vec{T}(s) \cdot \hat{\xi} = T(s) \frac{d\xi}{ds} \\ \vec{T}(s) \cdot \hat{z} = T(s) \frac{dz}{ds} \end{cases} \quad (1.1.7)$$

dalla (1.1.5) otteniamo:

$$\begin{cases} T(s) \frac{d\xi}{ds} = H \\ \frac{d}{ds} \left(T(s) \frac{dz}{ds} \right) = w \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Ricavando adesso dalla prima delle (1.1.8) l'espressione per $T(s)$ e sostituendola nella seconda delle (1.1.8) ricaviamo subito:

$$H \frac{d}{ds} \frac{dz}{d\xi} = w \quad (1.1.9)$$

che è l'equazione differenziale per la curva $z = z(\xi)$ cercata. Poiché si tratta di una equazione del secondo ordine, introduciamo la funzione di appoggio:

$$f(\xi) = \frac{dz}{d\xi} \quad (1.1.10)$$

con la quale la (9) diviene:

$$H \frac{df(\xi)}{ds} = w \quad (1.1.11)$$

Ricordando che H e w sono costanti, introduciamo **il parametro di tesatura k [m]** definito da:

$$k = \frac{H}{w} \quad (1.1.12)$$

e ricordiamo che:

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + dz^2} = \sqrt{d\xi^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 d\xi^2} = d\xi \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} = d\xi \sqrt{1 + f^2} \quad (1.1.13)$$

grazie alle (1.1.12) e (1.1.13) la (1.1.11) diviene (separando le variabili):

$$\frac{df}{\sqrt{1 + f^2}} = \frac{d\xi}{k} \quad (1.1.14)$$

Integrando ambo i membri otteniamo[1]:

$$\operatorname{asinh}(f) = \frac{\xi}{k} + C_1 \quad (1.1.15)$$

e finalmente, se ricordiamo la (1.1.10) ed integriamo di nuovo otteniamo [1]:

$$z(\xi) = k \cosh\left(\frac{\xi}{k} + C_1\right) + C_2 \quad (1.1.16)$$

che è l'espressione generale per la curva cercata.

Le due costanti arbitrarie di integrazione C_1 e C_2 devono essere determinate in base alle coordinate dei punti iniziale e finale della campata. In altre parole, assegnati due punti nello spazio e un valore per il parametro di tesatura k , esiste una ed una sola catenaria che passa per i punti dati ed ha quel valore del parametro di posa.

Esempio:

Siano le coordinate dei punti di sospensione sul piano verticale rispettivamente $(0,20)$ e $(200,30)$ e sia il parametro di tesatura pari a 1000 m ; i valori delle costanti arbitrarie $C1$ e $C2$ si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} k \cdot \cosh\left(\frac{0m}{k} + C1\right) + C2 = 20m \\ k \cdot \cosh\left(\frac{200m}{k} + C1\right) + C2 = 30m \end{cases}$$

che ha per soluzione:

$$C1 = -0,05 \quad C2 = -981,255\text{ m}$$

In generale si può dire che, una volta scelto un sistema di riferimento sul piano verticale su cui giace la catenaria, note su di esso le coordinate dei punti di sospensione e noto il parametro di tesatura, per ricavare l'espressione analitica della catenaria (cioè per determinare le costanti $C1$ e $C2$) è necessario risolvere un sistema di due equazioni trascendenti.

Nei prossimi paragrafi si prenderanno in esame alcuni particolari sistemi di riferimento *riferiti alla catenaria* che serviranno da base per ricavare la generica espressione della catenaria nello spazio date le coordinate in \mathbb{R}^3 dei suoi punti di sospensione e le sue caratteristiche meccaniche. In particolare si mira a scegliere il sistema di riferimento nel quale la soluzione analitica del sistema di equazioni con cui si determinano le costanti arbitrarie sia più semplice possibile.

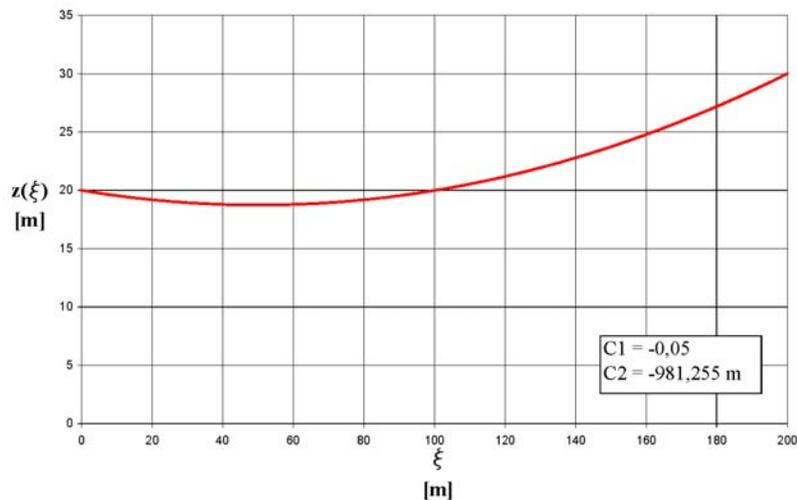


Fig. 1: Esempio paragrafo 1.1

1.2 SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE NEL MINIMO DELLA CATENARIA

Il sistema di riferimento piano in cui risulta più comodo scrivere l'espressione analitica della catenaria è quello con coordinate (v,u) che ha origine nel minimo della catenaria stessa. Imponendo che:

$$\frac{dv_c(0)}{dv} = 0$$

si ottiene $C1=0$ mentre imponendo:

$$v_c(0) = 0$$

si ricava $C2 = -k$.

Indipendentemente da dove si trovino i punti di sospensione della catenaria, la sua espressione analitica in questo particolare sistema di riferimento (v, v) è:

$$v_c(v) = k \left[\cosh\left(\frac{v}{k}\right) - 1 \right] \quad (1.2.1)$$

1.3 SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE NEL CENTRO DELLA CORDA

Si scelga ora un sistema di riferimento (χ, ζ) con origine nel punto di mezzo C della corda che unisce i punti di sospensione P_A e P_B con asse χ orizzontale ed asse ζ verticale (Fig. 2).

In questo sistema di riferimento date le coordinate del punto di sospensione P_B della catenaria $P_B=(a, b)$ le coordinate dell'altro punto di sospensione P_A sono $(-a, -b)$.

Note le coordinate (ξ_A, z_A) e (ξ_B, z_B) dei punti di sospensione nel generico sistema di riferimento del paragrafo 1.1 si ha che:

$$a = \frac{\xi_B - \xi_A}{2} \quad b = \frac{z_B - z_A}{2}$$

Come mostrato in Appendice C si può ricavare quanto segue:

$$L(k) = \sqrt{4k^2 \cdot \sinh^2\left(\frac{a}{k}\right) + 4b^2} \quad (1.3.1)$$

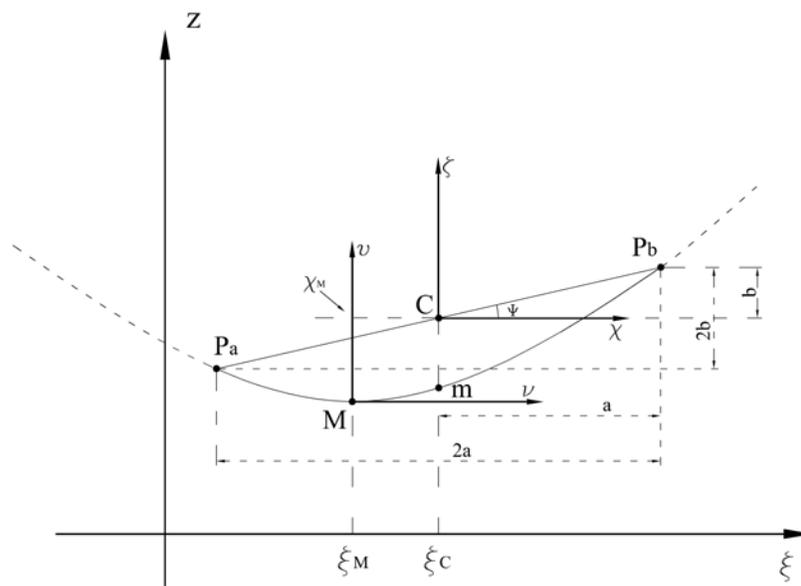


Fig. 2: Sistemi di riferimento bidimensionali riferiti alla catenaria

Nel sistema di riferimento (χ, ζ) l'equazione della catenaria si può scrivere come:

$$\zeta_c(\chi) = k \cdot \left\{ \cosh \left[\frac{\chi}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] - \cosh \left[\frac{a}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] \right\} + b \quad (1.3.2)$$

Le coordinate del minimo della catenaria (χ_M, ζ_M) sono date dalle:

$$\begin{cases} \chi_M = -k \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \\ \zeta_M = k \cdot \left\{ 1 - \cosh \left[\frac{a}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] \right\} + b \end{cases} \quad (1.3.3)$$

mentre l'ordinata del punto m (vedi **Fig. 2**) è data dalla:

$$\zeta_m = \zeta_c(0) = k \cdot \left\{ \cosh \left[\operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] - \cosh \left[\frac{a}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] \right\} + b \quad (1.3.4)$$

Esempio

Posti $a = 100 \text{ m}$, $b = 5 \text{ m}$, $k = 1000 \text{ m}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} L &= 200,583 \text{ m} & \zeta_m &= -5,01 \text{ m} \\ \chi_M &= -49,896 \text{ m} & \zeta_M &= -6,255 \text{ m} \end{aligned}$$

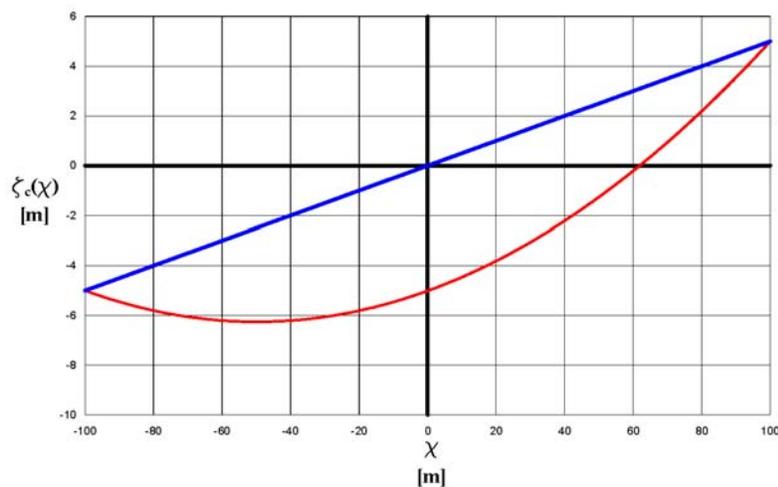


Fig. 3: Esempio paragrafo 1.3

1.4 ESPRESSIONE ANALITICA PER LA FRECCIA MASSIMA

Una grandezza a cui spesso ci si riferisce è la freccia massima del conduttore definita come la massima distanza verticale tra il conduttore e la relativa corda; per determinarne l'espressione si cerca il massimo della funzione $\Delta(\chi) = \frac{b}{a} \cdot \chi - \zeta_c(\chi)$, imponendo che:

$$\Delta'(\chi_{f_{\max}}) = \frac{b}{a} - \sinh \left[\frac{\chi_{f_{\max}}}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2b}{L} \right) \right] = 0$$

da cui si ottiene:

$$\chi_{f_{\max}} = k \left[\operatorname{asinh} \left(\frac{b}{a} \right) - \operatorname{atanh} \left(\frac{2b}{L} \right) \right] \quad (1.4.1)$$

e quindi

$$f_{\max} = \Delta(\chi_{f_{\max}}) = k \left\{ \frac{b}{a} \cdot \left[\operatorname{asinh} \left(\frac{b}{a} \right) - \operatorname{atanh} \left(\frac{2b}{L} \right) \right] - \cosh \left[\operatorname{asinh} \left(\frac{b}{a} \right) \right] + \cosh \left[\frac{a}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2b}{L} \right) \right] \right\} - b \quad (1.4.2)$$

Nel caso sia $b=0$ m (campata a livello):

$$f_{\max} = -k \left\{ 1 - \cosh \left(\frac{a}{k} \right) \right\} \quad (1.4.3)$$

La (1.4.3) può essere usata anche nel caso in cui $b \neq 0$ ma $b \ll a$.

Esempio

Dato $k=1000$ m e definita f_{app} la freccia ricavata con la (1.4.3) si ha che:

a [m]	b/a	f _{max} [m]	f _{app} [m]	Δf%
100	0,01	5,004	5,004	0
100	0,02	5,005	5,004	0,02
100	0,05	5,01	5,004	0,12
100	0,1	5,029	5,004	0,5
100	0,2	5,103	5,004	1,94
100	0,5	5,593	5,004	10,53
100	1	7,072	5,004	29,24
200	0,01	20,068	20,067	0,005
200	0,02	20,071	20,067	0,02
200	0,05	20,092	20,067	0,12
200	0,1	20,166	20,067	0,49
200	0,2	20,46	20,067	1,92
200	0,5	22,411	20,067	10,46
200	1	28,3	20,067	29,03

Come si può notare lo scarto percentuale $\Delta f\%$ è dipende dal rapporto b/a ma è praticamente indipendente dal valore dei termini a numeratore e denominatore.

2 DESCRIZIONE DELLA CATENARIA NELLO SPAZIO

Consideriamo adesso un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale (x,y,z) con origine O , asse z verticale e con verso dal basso verso l'alto, asse y orizzontale, diretta da sud verso nord ed asse x orizzontale, diretta da ovest verso est. Siano note le coordinate dei punti di sospensione della catenaria $P_A=(x_A, y_A, z_A)$ e $P_B=(x_B, y_B, z_B)$; sia noto inoltre il parametro di posa k della catenaria.

Nel sistema di coordinate scelto si può descrivere la catenaria mediante un sistema di due equazioni di cui una individua il piano verticale su cui la curva giace, l'altra descrive la catenaria sul piano verticale determinato ed avrà dunque una forma riconducibile a quelle analizzate nei paragrafi precedenti. In particolare sia α l'angolo tra l'asse y e la retta passante per i punti $(x_A, y_A, 0)$ e $(x_B, y_B, 0)$ positivo in senso orario.

Se $|\tan(\alpha)| < 1$ conviene utilizzare y come parametro per la definizione della catenaria sotto forma di curva parametrica; con tale scelta si è in grado di gestire il caso particolare in cui $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} x = x_C + \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \right) \cdot (y - y_C) \\ z = z_B + k \left\{ \cosh \left[\frac{y - y_C}{k \cdot \cos(\alpha)} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] - \cosh \left[\frac{a}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] \right\} \end{cases}$$

dove:

$$\alpha = \operatorname{atan} \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \right) \quad x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$$

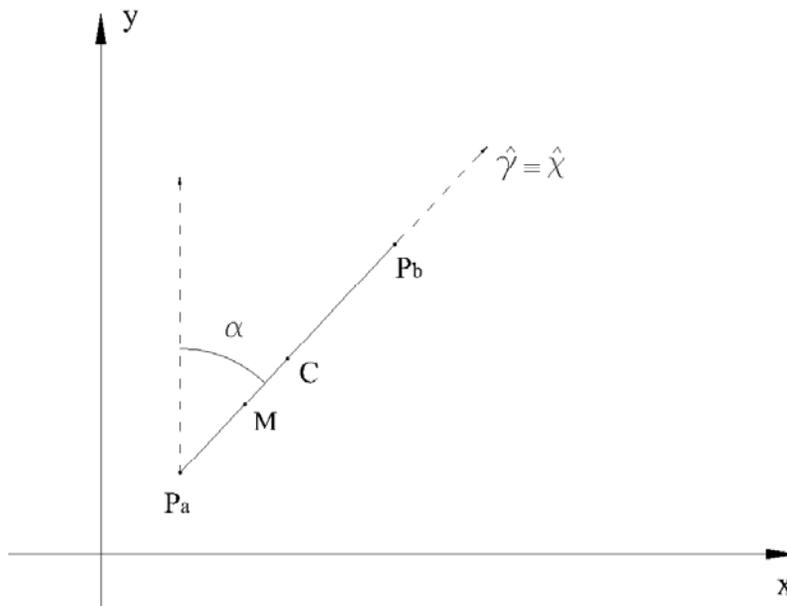


Fig. 4: Definizione dell'angolo α

Mentre, se $|\tan(\alpha)| > 1$, conviene utilizzare x come parametro per la definizione della catenaria sotto forma

di curva parametrica; con tale scelta si è in grado di gestire il caso particolare in cui $\alpha = \pi/2$:

$$\begin{cases} y = y_C + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) \cdot (x - x_C) \\ z = z_B + k \left\{ \cosh \left[\frac{x - x_C}{k \cdot \sin(\alpha)} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] - \cosh \left[\frac{a}{k} + \operatorname{atanh} \left(\frac{2 \cdot b}{L} \right) \right] \right\} \end{cases} \quad (2.0.1)$$

dove, se si vuole evitare di dover gestire la divisione per 0 nel caso $\alpha = \pi/2$:

$$\alpha = \operatorname{acotan} \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right)$$

Esempio

Siano $(800,700,180)$ e $(150,150,60)$ le coordinate dei punti di sospensione di una catenaria con parametro di posa $k=1250$ m, sfruttando le (2.0.1) si ottiene il grafico in **Fig. 5**.

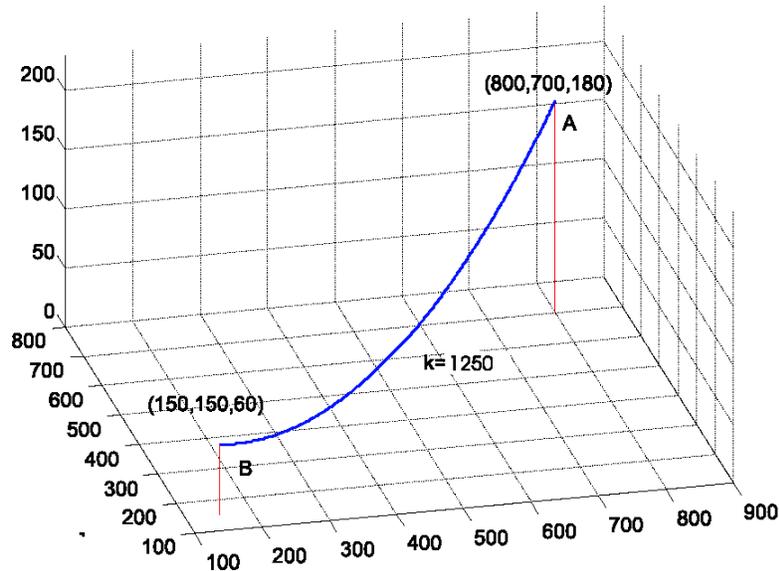


Fig. 5: Rappresentazione tridimensionale di una catenaria

3 L'INFLUENZA DELLE CONDIZIONI AMBIENTALI E DI ESERCIZIO SUL PARAMETRO DI TESATURA

Il parametro di tesatura di un conduttore non rimane costante ed uguale al suo valore di posa, ma varia in funzione delle condizioni ambientali, di quelle di esercizio della linea elettrica e delle caratteristiche geometriche del conduttore stesso. Il valore di riferimento per il coefficiente di tesatura è il cosiddetto valore *EDS* (*Every Day Stress*) che, come il nome stesso indica, è considerato rappresentativo delle normali condizioni di sollecitazione a cui sono sottoposti i conduttori. Tale valore corrisponde normalmente al rapporto tra una frazione fissata del carico di rottura di ciascun conduttore e il suo peso per unità di lunghezza. Al momento della posa, il tiro su ogni campata viene fissato in modo che questo risulti costante su tutte le campate della linea quando la temperatura ambientale è di $15^{\circ} C$, non vi siano sovraccarichi meccanici ed il conduttore non sia percorso da corrente; queste ultime sono le condizioni che definiscono lo stato EDS.

È necessario introdurre le definizioni di sostegno di *ancoraggio* (o *amarro*) e di *tratta di linea*: per *sostegno di amarro* si intende un sostegno presso il quale vi è un vincolo rigido tra il conduttore e la struttura fissa del sostegno; dunque due campate di conduttore che abbiano a comune un sostegno di amarro sono meccanicamente indipendenti in quanto è il sostegno a controbilanciare sia il tiro che il peso di ciascuno dei conduttori. Al contrario, per due campate che abbiano a comune un *sostegno di sospensione*, le condizioni di equilibrio meccanico presso il punto di sospensione impongono che i tiri orizzontali delle campate siano uguali ed opposti in quanto il vincolo col sostegno bilancia solo la componente verticale dei tiri ed il peso dei conduttori.

Definita con *tratta* l'insieme di campate comprese tra due sostegni di amarro, segue che campate appartenenti alla stessa tratta abbiano sempre lo stesso parametro di tesatura mentre in genere si ha che, in condizioni diverse da quelle EDS, a diverse tratte corrispondono valori diversi. In questo capitolo si valuterà come varia il parametro di tesatura per una catenaria se si considerano condizioni ambientali e di esercizio diverse da quelle EDS; in tale analisi si considereranno inizialmente catenarie per cui entrambi i sostegni sono di amarro mentre nell'ultimo paragrafo del capitolo è riportata un'estensione di tale analisi a tratte di linea che comprendano più di una campata.

3.1 L'INFLUENZA DELLE CONDIZIONI AMBIENTALI

Supponiamo che il conduttore non sia percorso da corrente e che quindi assuma la stessa temperatura dell'ambiente esterno non essendovi produzione di calore per effetto Joule. I fattori che possono causare modifiche dello sviluppo della catenaria sono le variazioni della temperatura atmosferica e la presenza di eventuali sovraccarichi meccanici sul conduttore quali un manicotto di ghiaccio o la pressione del vento.

Per valutare gli effetti delle condizioni ambientali si imposta il cosiddetto *bilanciamento degli allungamenti* secondo il quale, noto il parametro della catenaria k_{EDS} e nota dunque la relativa lunghezza in condizioni EDS, nelle nuove condizioni ambientali il parametro di tesatura k della catenaria è quello per cui viene soddisfatta la seguente:

$$L(k) - L_{EDS} = \Delta L_{termico} + \Delta L_{elastico} \quad (3.1.1)$$

dove $L(k)$ è definita dalla (1.3.1) e dove:

$$\begin{cases} k_{EDS} = 0.21 \cdot \frac{\text{Carico di rottura conduttore}}{\text{Peso per metro conduttore}} \\ L_{EDS} = L(k_{EDS}) \end{cases}$$

(per i conduttori di elettrodotti a 380 kV il parametro in condizioni EDS è definito considerando il 21% del carico di rottura del conduttore).

3.1.1 Variazioni della temperatura ambiente

Posto che il conduttore non sia percorso da corrente la sua temperatura è pari a quella dell'ambiente ($t_c=t_{amb}$); le variazioni della temperatura ambientale e quindi di quella del conduttore determinano un allungamento (aumento di temperatura) o una contrazione del conduttore stesso (diminuzione di temperatura) la cui entità dipende dal *coefficiente di dilatazione termica* α_T (1/°K) secondo la seguente relazione:

$$\Delta L_{termico} = \alpha_T \cdot L_{EDS} (t_c - t_{EDS}) = \alpha_T \cdot L_{EDS} (t_{amb} - t_{EDS})$$

3.1.2 Sovraccarichi meccanici

Per sovraccarichi meccanici si intendono sia la presenza di un manicotto di ghiaccio, sia la pressione del vento; quest'ultimo si considera sempre orizzontale cosicché il suo contributo viene sommato vettorialmente a quello dei pesi del metallo e, se presente, del ghiaccio.

$$\begin{cases} P_{eq} = \sqrt{P_{app}^2 + P_v^2} & \text{peso apparente risultante in N/m} \\ P_{app} = P_c + P_g = P_c + 0,92 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot s_g \cdot (2 \cdot r_c + s_g) \cdot g & \text{peso apparente N/m} \\ P_v = 0,67 \cdot V^2 \cdot d_a & \text{forza di trascinamento del vento in N/m} \end{cases}$$

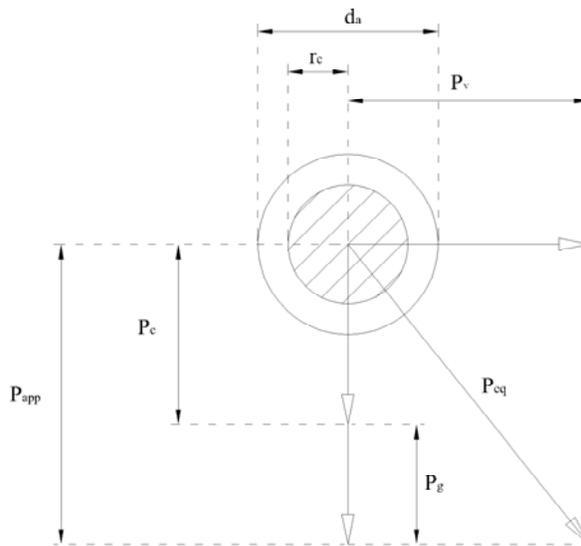


Fig. 6: Sovraccarichi meccanici

dove:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_g & \text{spessore manicotto di ghiaccio [m]} \\ r_c & \text{raggio del conduttore [m]} \\ 0,92 \cdot 10^3 & \text{densità volumetrica del ghiaccio [kg/m}^3\text{]} \\ d_a = 2 \cdot (r_c + s_g) & \text{diametro apparente del conduttore [m]} \\ V & \text{velocità del vento in [m/s]} \end{array} \right.$$

Le precedenti espressioni permettono di ricavare il peso apparente risultante P_{eq} per metro di conduttore nelle date condizioni ambientali (per una giustificazione della espressione della forza di trascinamento del vento si veda [4] e l'Appendice D); noto il modulo di elasticità ε_c del conduttore in N/mm² e la sezione dell'anima portante del conduttore S_c in mm² si ricava l'allungamento del conduttore per effetto dei sovraccarichi con la seguente:

$$\Delta L_{elastico} = \frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \frac{L_{EDS}}{S_c} (k \cdot P_{eq} - k_{EDS} \cdot P_c)$$

3.1.3 Il bilanciamento degli allungamenti

L'equilibrio tra le varie componenti dell'allungamento del conduttore dovute ai sovraccarichi meccanici ed alle variazioni di temperatura ambiente si impone attraverso la (3.1.1) che riportiamo qui per comodità:

$$L(k) - L_{EDS} = \Delta L_{termico} + \Delta L_{elastico}(k) \quad (3.1.1)$$

Note le caratteristiche del conduttore e le condizioni ambientali la (3.1.1) permette di ricavare il nuovo parametro di tesatura k assunto dal conduttore nelle particolari condizioni date.

La trattazione statica del primo capitolo rimane valida anche se al peso effettivo del conduttore P_c si sostituisce la forza peso apparente risultante P_{eq} essendo questa comunque ortogonale alla tensione meccanica in ogni punto della catenaria; il fatto che la forza peso apparente non sia verticale fa sì che il piano di giacitura della curva sia inclinato rispetto alla verticale.

Esempio

Si consideri un conduttore con le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$\begin{array}{ll} r_c = 15 \text{ mm} & S_c = 586 \text{ mm}^2 \\ P_c = 1,95 \text{ kg/m} & T_{rottura} = 16850 \text{ kg} \\ \alpha_T = 19,4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K} & \varepsilon_c = 6800 \text{ kg/mm}^2 \end{array}$$

nella tabella seguente si riportano il parametro di tesatura della catenaria, la sua lunghezza, la sua freccia massima e le componenti termica ed elastica dell'allungamento, al variare della lunghezza della campata, del suo dislivello e delle caratteristiche ambientali. I dati indicati sono quelli tipici forniti da Enel per un conduttore di una linea a 380 kV; per poterli utilizzare nelle espressioni descritte nel precedente paragrafo si devono applicare le opportune trasformazioni di unità di misura (sistema MKS).

Dati					Denom. Stato	Risultati						$\Delta f\%$
Campata		Ambiente				Campata			Allungamenti			
a [m]	b [m]	V [km/h]	S _g [mm]	t _{amb} [°C]		k [m]	L [m]	f _{max} [m]	Tot [m]	Termico [m]	Elastico [m]	
100	5	0	0	15	EDS	1812	200,351	2,76	0	0	0	
100	5	0	0	55	MFA	1277	200,454	3,923	0,103	0,155	-0,053	+42,1 %
100	5	0	12	-20	MSB	1824	200,35	2,746	-0,001	-0,136	0,135	-0,6%
200	5	0	0	15	EDS	1812	400,937	11,052	0	0	0	
200	5	0	0	55	MFA	1574	401,202	12,727	0,264	0,311	-0,047	+15,1 %
200	5	0	12	-20	MSB	1817	400,933	11,02	-0,005	-0,272	0,267	-0,3%

Come si può notare i due tipi di allungamento (termico ed elastico) si bilanciano a vicenda; infatti, se la temperatura ambiente (assunta pari a quella del conduttore) è più alta rispetto ai 15°C dello stato EDS (condizioni iniziali), il conduttore tende ad allungarsi per effetto termico; questo allungamento tende però a diminuire il tiro del conduttore che reagisce accorciandosi grazie alle sue proprietà elastiche, per cui alla fine l'allungamento totale è minore di quanto il solo aumento di temperatura avrebbe indotto nel conduttore non sospeso per i suoi estremi. Se invece la temperatura ambiente (assunta pari a quella del conduttore) è più bassa rispetto ai 15°C dello stato EDS il conduttore tende ad accorciarsi per effetto termico, questo accorciamento tende però ad aumentare il tiro del conduttore che reagisce grazie alle sue proprietà elastiche allungandosi, dunque l'accorciamento totale è minore di quanto la sola diminuzione di temperatura avrebbe indotto nel conduttore non sospeso per i suoi estremi. Inoltre, c'è da notare che tanto più lunga è la campata quanto più le proprietà elastiche del conduttore sono in grado di controbilanciare gli effetti dovuti alle variazioni di temperatura.

3.2 INFLUENZA DELLE CONDIZIONI DI CARICO

L'approccio del precedente paragrafo modella le condizioni ambientali a cui il conduttore è soggetto ma non tiene conto dello scorrimento di corrente su di esso; un modello più accurato deve tenere conto che la temperatura del conduttore e quella dell'ambiente non coincidono e che in particolare vi sia un certo $\Delta T = (t_c - t_{amb}) > 0$ a causa dell'energia dissipata per effetto Joule nel conduttore stesso. In particolare, noto il valore efficace I della corrente che scorre sul conduttore si può determinare la sua temperatura t_c imponendo l'equilibrio degli scambi termici tra conduttore ed ambiente:

$$I^2 R = W_r + W_c \quad (3.2.1)$$

dove $I^2 R$ è la potenza per unità di lunghezza dissipata per effetto Joule, W_r è la potenza per unità di lunghezza dispersa nell'ambiente per irraggiamento e W_c è la potenza per unità di lunghezza dispersa nell'ambiente per convezione che terrà dunque conto del vento dal punto di vista termico, laddove nel modello del paragrafo precedente veniva considerato solo dal punto di vista meccanico. In particolare I è l'intensità di corrente che scorre sul conduttore mentre R è la sua resistenza per unità di lunghezza che varia con la temperatura t_c a causa delle relative variazioni di lunghezza secondo la seguente:

$$R = R_{20^\circ C} [1 + \alpha_T (t_c - 293)] \quad [\Omega/m]$$

dove $R_{20^\circ C}$ è la resistenza per metro di conduttore a 20°C.

Le espressioni (empiriche) per W_r e W_c , valide per l'alluminio, sono quelle ricavate sperimentalmente da

Shurig e Frick nel 1930; oltre ai simboli già utilizzati in esse compaiono il diametro del conduttore $d_c = 2 \cdot r_c$ in metri e la pressione ambiente P_{amb} in Pascal:

$$W_c = 6,0352691 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{P_{amb} \cdot V \cdot d_c}}{t_m} \cdot (t_c - t_{amb}) \quad \left[\frac{W}{m} \right]$$

con:

$$t_m = \frac{t_c + t_{amb}}{2}$$

dove al solito t_c e t_{amb} sono le temperature assolute del conduttore e dell'ambiente. L'espressione per W_r è invece:

$$W_r = 179 \cdot e \cdot d_c \cdot \left[\left(\frac{t_c}{100} \right)^4 - \left(\frac{273}{100} \right)^4 \right] \quad \left[\frac{W}{m} \right]$$

dove e è il coefficiente di emissione della superficie del conduttore posto generalmente pari a 0,5 per conduttori in alluminio in uso da tempo.

Note le condizioni ambientali e le caratteristiche del conduttore, la (3.2.1) permette di ricavare la relativa temperatura assoluta t_c che il conduttore assume se percorso da corrente con valore efficace I . La t_c così determinata viene poi utilizzata nella relazione che esprime l'equilibrio degli allungamenti (3.1.1) per determinare il nuovo parametro di tesatura k assunto dalla catenaria *nelle condizioni ambientali e di esercizio assegnate*.

Esempio

Si consideri un conduttore con le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$\begin{aligned} r_c &= 15 \text{ mm} & S_c &= 586 \text{ mm}^2 \\ P_c &= 1,95 \text{ kg/m} & T_{rottura} &= 16850 \text{ kg} \\ \alpha_T &= 19,4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K} & \varepsilon_c &= 6800 \text{ kg/mm}^2 \\ R_{20^\circ C} &= 0.05564 \text{ } \Omega/\text{km} & e &= 0,5 \end{aligned}$$

nella tabella seguente si riportano la temperatura del conduttore, il suo il parametro di tesatura, la sua lunghezza, la sua freccia massima, le componenti termica ed elastica dell'allungamento ed i singoli termini che compongono l'equilibrio degli scambi termici tra conduttore ed ambiente al variare della lunghezza della campata, del suo dislivello, delle condizioni ambientali (P_{amb} fissata a 1 atm cioè 101325 Pa) e della corrente che scorre sul conduttore. Anche in questo caso sono necessarie le opportune trasformazioni di unità di misura per riportare i dati forniti da Enel nel

Dati						Risultati									
Campata		Ambiente			Corr.	Campata				Allungamenti			Potenza		
a [m]	b [m]	V [km/h]	S _g [mm]	t _{amb} [°C]	I [A]	t _c [°C]	k [m]	L [m]	f _{max} [m]	Tot [cm]	Ter. [cm]	Ela. [cm]	I ² R [W/km]	W _r [W/km]	W _c [W/km]
100	5	2	0	15	0	15	1812	200,35	2,76	0	0	0	0	0	0
100	5	2	0	15	500	24,4	1650	200,37	3,03	2,1	3,7	-1,6	13,9	2,5	11,4
100	5	2	12	15	1000	52,8	1306	200,44	3,83	9,4	14,4	-5	55,7	11,4	44,3
100	5	2	0	55	1000	89,4	1030	200,56	4,86	21,2	28,9	-7,7	55,7	15,1	40,6
100	5	65	0	55	1000	62,8	1195	200,48	4,19	13,2	18,6	-5,5	55,69	3	52,69
100	5	65	12	-20	1000	-12,2	1665	200,37	3,01	1,9	-10,6	12,5	55,61	1,41	54,2

sistema MKS a cui si riferiscono tutte le espressioni di questo documento.

Come si può notare nelle prime righe della tabella, fissate le condizioni ambientali, ma variando la corrente sul conduttore si osserva semplicemente un aumento della sua temperatura che, come ci si poteva aspettare è legato all'incremento di corrente da una relazione all'incirca quadratica. All'aumentare della corrente rimane abbastanza stabile il rapporto tra la frazione di potenza termica dissipata per convezione e quella dissipata per radiazione. Il fattore vento gioca dal punto di vista termico un ruolo importante, infatti, a parità di corrente e delle altre condizioni ambientali, la sua presenza facilita gli scambi termici per convezione cosicché il conduttore subisce un minore incremento di temperatura. C'è infine da notare che, in presenza di vento, il rapporto fra la potenza dissipata per convezione e quella dissipata per irraggiamento aumenta decisamente, portandosi da valori intorno a 4 in condizioni di aria ventilata ($V=2 \text{ km/h}=0,55 \text{ m/s}$) a valori di alcune decine già con vento a 65 km/h.

3.3 ESTENSIONE A TRATTE DI LINEA

Gli esempi sin qui riportati trattano il caso di una tratta di linea costituita da una singola campata che è dunque compresa fra due sostegni di amarro; in realtà ciò non accade se non in casi particolari. Normalmente le tratte di linea sono composte da più campate il cui numero può oltrepassare la decina nel caso di linee elettriche con tracciato rettilineo su terreno piano. Tutte le campate della tratta assumono lo stesso parametro di tesatura che dunque deve essere calcolato con un algoritmo adeguatamente esteso.

In particolare mentre per ricavare la temperatura dal conduttore si può utilizzare la (3.2.1) senza alcuna variazione (i cui singoli termini dipendono dalle caratteristiche fisiche del conduttore ma non dalla sua disposizione geometrica), per impostare l'equilibrio degli allungamenti la (3.1.1) non può essere applicata direttamente ma, per una tratta composta da n campate, deve essere modificata come segue:

$$\sum_{i=1}^n L_i(k) - \sum_{i=1}^n L_{EDS_i} = \sum_{i=1}^n \Delta L_{termico_i} + \sum_{i=1}^n \Delta L_{elastico_i} \quad (3.3.1)$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_i(k) = \sqrt{4k^2 \cdot \sinh^2\left(\frac{a_i}{k}\right) + 4b_i^2} \\ L_{EDS_i} = L_i(k_{EDS}) \\ \sum_{i=1}^n \Delta L_{termico_i} = \alpha_T \cdot (t_c - t_{EDS}) \sum_{i=1}^n L_{EDS_i} \\ \sum_{i=1}^n \Delta L_{elastico_i} = \frac{1}{\epsilon_c \cdot S_c} (k \cdot P_{eq} - k_{EDS} \cdot P_c) \sum_{i=1}^n L_{EDS_i} \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

4 IL MODELLO GEOMETRICO SEMPLIFICATO

Nella manualistica non è raro vedere assimilata la catenaria ad una parabola equivalente; in passato, la mancanza di efficienti strumenti per la soluzione di equazioni non lineari ha fatto sì che venisse utilizzata tale approssimazione che permette di sviluppare considerazioni analoghe a quelle dei paragrafi precedenti senza la necessità di risolvere numericamente alcuna equazione ma al più grazie all'ausilio di apposite tavole grafiche o di tabelle numeriche [3]. In questa sede si ritiene necessario dedicare attenzione a questa approssimazione, sia per completezza di trattazione sia per quantificare indicativamente gli errori in cui si incorre utilizzandola.

4.1 CAMPATE A LIVELLO

Poniamoci per semplicità nel sistema di riferimento con origine nel minimo della curva (paragrafo 1.2), sviluppando la (1.2.1) in un intorno di $\frac{x}{k} = 0$ ed arrestandosi al secondo termine (si è indicato v con x e v con z) si ha:

$$z(x) = k \left[\cosh\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \right] \approx k \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{k^2} \right) - 1 \right] = \frac{x^2}{2k}$$

La lunghezza L della catenaria viene approssimata sviluppando la (1.3.1) con $b=0$ m (campata a livello) in un intorno di $\frac{a}{k} = 0$:

$$L = 2k \cdot \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \approx 2k \left[\frac{a}{k} + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{k}\right)^3 \right] = 2a + \frac{a^3}{3k^2} \quad (4.1.1)$$

Posto che la campata D sia pari a $2a$, per campate a livello la freccia massima è data da:

$$f_{\max} = z(a) \approx \frac{a^2}{2k} = \frac{D^2}{8k} \quad (4.1.2)$$

e dunque la (4.1.1) si può riscrivere come:

$$L \approx D + \frac{8}{3} \frac{f_{\max}^2}{D} = D + \frac{D^3}{24 \cdot k^2} \quad (4.1.3)$$

4.2 VALIDITÀ DEL MODELLO SEMPLIFICATO

Nel generico sistema di riferimento l'espressione della parabola equivalente alla catenaria si scrive:

$$z(x) = \frac{(x + C_1)^2}{2k} + C_2$$

mentre le espressioni (4.1.1) (4.1.2) e (4.1.3) si possono considerare valide fintanto che si verifichino le seguenti relazioni (vedi **Fig. 7** per la seconda):

$$\begin{cases} a \ll k \\ c = \sqrt{D^2 + h^2} \approx D \end{cases} \quad (4.2.1)$$

dove c è la lunghezza della corda che unisce i punti di sospensione ed h è il dislivello tra di essi ($h=2b$).

La prima delle (4.2.1) può essere esposta dicendo che *la campata deve essere sufficientemente tesa* mentre la seconda relazione esclude le *campate fortemente rampanti*, aventi cioè un grande dislivello $h=2b$ tra gli appoggi con una distanza orizzontale D relativamente piccola, condizione che può alternativamente essere espressa dalla espressione $b \ll a$.

4.3 CAMPATE FORTEMENTE RAMPANTI

In questo paragrafo si considerano le campate che verificano solo la prima delle (4.2.1).

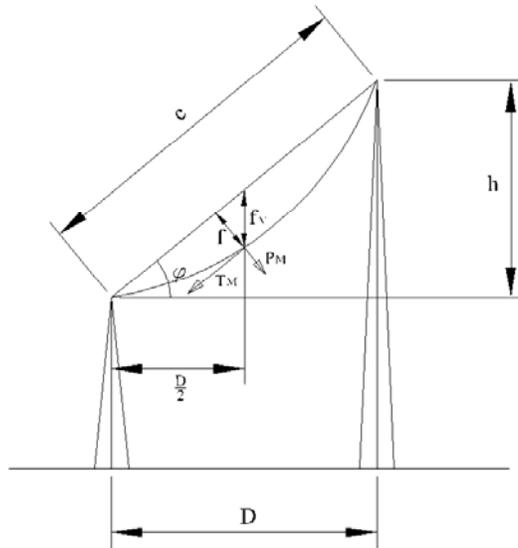


Fig. 7: Campata a forte dislivello

considerato che, con riferimento alla Fig. 7:

$$\cos\varphi = \frac{D}{\sqrt{D^2 + h^2}} \quad c = \frac{D}{\cos\varphi}$$

$$k_M = \frac{T_M}{P_M} = \left(\frac{T_0}{\cos\varphi} \right) \left(\frac{1}{P \cos\varphi} \right) = \frac{k}{\cos^2\varphi}$$

$$f_v = \frac{f}{\cos\varphi} = \frac{1}{8} \frac{c^2}{k_M}$$

il modello semplificato è ancora utilizzabile purché, al posto delle (4.1.2) e (4.1.3), si utilizzino le seguenti:

$$\begin{cases} f_v = \frac{1}{8} \frac{D \sqrt{D^2 + h^2}}{k} \\ L = c + \frac{8}{3} \frac{f_v^2}{c} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Esempio

Nella seguente tabella sono riportati alcuni esempi numerici che aiutano a capire l'entità delle approssimazioni introdotte dai modelli semplificati, in particolare per quanto riguarda le espressioni della lunghezza della catenaria e della sua freccia massima.

Dati			Catenaria		Parabola a livello		Parabola non a livello	
a [m]	b [m]	k [m]	L [m]	Fmax [m]	ΔL %	Δf %	ΔL %	Δf %
100	5	500	201,584	10,046	$-1,24 \cdot 10^{-3}$	$-4,56 \cdot 10^{-3}$	$+3,24 \cdot 10^{-6}$	$+3,3 \cdot 10^{-6}$
100	5	1000	200,583	5,01	$-1,24 \cdot 10^{-3}$	$-2,08 \cdot 10^{-3}$	$+3,32 \cdot 10^{-6}$	$+8,29 \cdot 10^{-6}$
100	5	2000	200,333	2,504	$-1,25 \cdot 10^{-3}$	$-1,46 \cdot 10^{-3}$	$+9,8 \cdot 10^{-7}$	$-2,07 \cdot 10^{-4}$
200	10	2000	401,166	10,021	$-1,24 \cdot 10^{-3}$	$-2,08 \cdot 10^{-3}$	$+3,32 \cdot 10^{-6}$	$-8,29 \cdot 10^{-6}$
400	20	2000	805,337	40,183	$-1,24 \cdot 10^{-3}$	$-4,56 \cdot 10^{-3}$	$+3,24 \cdot 10^{-6}$	$-3,3 \cdot 10^{-6}$
100	10	500	202,327	10,083	$-4,9 \cdot 10^{-3}$	$-8,22 \cdot 10^{-3}$	$+5,22 \cdot 10^{-5}$	$+5 \cdot 10^{-3}$
100	20	500	205,271	10,23	$-1,9 \cdot 10^{-2}$	$-2,2 \cdot 10^{-2}$	$+2,41 \cdot 10^{-4}$	$-3,1 \cdot 10^{-3}$
100	40	500	216,648	10,798	$-7,1 \cdot 10^{-2}$	$-7,4 \cdot 10^{-2}$	$+9 \cdot 10^{-4}$	$-2,57 \cdot 10^{-3}$
100	20	1000	204,288	5,103	$-1,9 \cdot 10^{-2}$	$-2 \cdot 10^{-2}$	$+6,3 \cdot 10^{-5}$	$-7,8 \cdot 10^{-4}$
100	20	2000	204,043	2,55	$-1,9 \cdot 10^{-2}$	$-2 \cdot 10^{-2}$	$+1,56 \cdot 10^{-5}$	$-1,95 \cdot 10^{-4}$

4.4 IL BILANCIAMENTO DEGLI ALLUNGAMENTI PER CAMPATE SINGOLE E PER TRATTE DI LINEA

Riscrivendo la (3.1.1) utilizzando la (4.1.3) si ottiene

$$\frac{D^3}{24 \cdot k} - \frac{D^3}{24 \cdot k_{EDS}} = \Delta L_{termico} + \Delta L_{elastico} = L_{EDS} \left[\frac{1}{\epsilon_c S_c} \cdot (k \cdot P_{eq} - k_{EDS} \cdot P_c) + \alpha_T (t_c - t_{EDS}) \right]$$

ma ponendo che:

$$L_{EDS} \approx D$$

si ottiene:

$$\frac{D^2}{24 \cdot k} - \frac{D^2}{24 \cdot k_{EDS}} = \left[\frac{1}{\epsilon_c S_c} \cdot (k \cdot P_{eq} - k_{EDS} \cdot P_c) + \alpha_T (t_c - t_{EDS}) \right] \quad (4.2.3)$$

Al solito, se si considera una tratta di n campate si ha che:

$$\frac{\sum_{i=1}^n D_i^3}{24 \cdot k} - \frac{\sum_{i=1}^n D_i^3}{24 \cdot k_{EDS}} = \left(\sum_{i=1}^n L_{EDS_i} \right) \cdot \left[\frac{1}{\epsilon_c S_c} \cdot (k \cdot P_{eq} - k_{EDS} \cdot P_c) + \alpha_T (t_c - t_{EDS}) \right]$$

ma ponendo che:

$$\sum_{i=1}^n D_i \approx \sum_{i=1}^n L_{EDS_i}$$

si ottiene:

$$\frac{D_{equivalente}^2}{24 \cdot k} - \frac{D_{equivalente}^2}{24 \cdot k_{EDS}} = \left[\frac{1}{\epsilon_c S_c} \cdot (k \cdot P_{eq} - k_{EDS} \cdot P_c) + \alpha_T (t_c - t_{EDS}) \right] \quad (4.2.4)$$

che è del tutto equivalente alla (4.2.3) per una campata singola dove rimane definita:

$$D_{equivalente} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D_i^3}{\sum_{i=1}^n D_i}} \quad (4.2.5)$$

5 BIBLIOGRAFIA

- [1] H.B.Dwight: "Tables of integrals and other mathematical data", espressioni 728.1 e 671.1 in ordine di citazione, The MacMillan Company, Quarta edizione, 1971.
- [2] N.Zoppetti: "Impatto ambientale dei campi generati dagli elettrodotti: sviluppo ed applicazione di un metodo innovativo per la valutazione", Tesi in ingegneria elettronica, Università di Firenze, 13 Marzo 2002.
- [3] L.Olivieri, E.Ravelli: "Elettrotecnica, Volume Quarto, Impianti di generazione e trasporto dell'energia elettrica", pagina 426 e seguenti, Cedam, Padova, Dodicesima edizione, 1980.
- [4] S. Bosi, A. Cerro, E. Coli, "Dispense ed esercizi relative ai corsi di Fisica Tecnica tenuti dal Prof. Angelo Farina presso l'Università degli studi di Parma" (<http://pcangelo.eng.unipr.it>).

APPENDICI

A. LE FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{cases} \sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \frac{2 \cdot (e^{2x} + e^{-2x})}{4} = \cosh(2x) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} \\ \sinh(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [\sinh(x)] = \cosh(x) \\ \frac{d}{dx} [\cosh(x)] = \sinh(x) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

B. DETERMINAZIONE DELLA LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Detto $d\vec{s}$ l'elemento infinitesimo di curva con ascissa curvilinea s si ha che:

$$L = \int_{\text{curva}} |d\vec{s}| = \int_{\text{curva}} ds \quad (\text{B.1})$$

In un sistema di riferimento bidimensionale (x, z) in cui l'equazione della curva è nella forma $z = z(x)$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + [z'(x)]^2} \quad (\text{B.2})$$

e quindi:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + [z'(x)]^2} dx \quad (\text{B.3})$$

Sul generico sistema di riferimento bidimensionale e verticale (x, z) si ha che (vedi equazione (1.1.16)):

$$z(x) = k \cosh\left(\frac{x}{k} + C_1\right) + C_2 \quad (\text{B.4})$$

dalla (A.4)

$$z'(x) = k \cdot \sinh\left(\frac{x}{k} + C_1\right) \cdot \frac{1}{k} = \sinh\left(\frac{x}{k} + C_1\right)$$

e quindi (dalle (A.2)):

$$1 + [z'(x)]^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{k} + C_1\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{k} + C_1\right)$$

sviluppando la (B.3);

$$\begin{aligned} L &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + \cosh^2\left(\frac{x}{k} + C_1\right)} dx = \int_{-a}^a \sqrt{\sinh^2\left(\frac{x}{k} + C_1\right) + 1} dx = \int_{-a}^a \cosh\left(\frac{x}{k} + C_1\right) dx = \\ &k \left[\sinh\left(\frac{a}{k} + C_1\right) - \sinh\left(\frac{-a}{k} + C_1\right) \right] = k \left[\frac{(e^{C_1} + e^{-C_1})(e^{a/k} - e^{-a/k})}{2} \right] \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\frac{L}{2} = k \cdot \cosh(C_1) \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \quad (\text{B.5})$$

C. DETERMINAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA CATENARIA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE AL CENTRO DELLA CORDA

Come si è visto, l'espressione della catenaria nel generico sistema di riferimento bidimensionale definito sul piano di giacenza della curva è della forma (vedi paragrafo 1.1 equazione (1.1.16)):

$$z(x) = k \cosh\left(\frac{x}{k} + C_1\right) + C_2 \quad (\text{C.1})$$

Per determinare le costanti C_1 e C_2 relative al sistema di riferimento considerato si impone che:

$$\begin{cases} z(a) - z(-a) = 2b \\ z(a) = b \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

inoltre si utilizza come funzione ausiliaria la lunghezza della curva data dalla (B.5):

$$\frac{L}{2} = k \cdot \cosh(C_1) \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \quad (\text{C.3})$$

Sviluppando la prima delle (C.2) ed utilizzando le (A.1) si ottiene:

$$2b = k \left[\cosh\left(\frac{a}{k} + C_1\right) - \cosh\left(\frac{-a}{k} + C_1\right) \right] =$$

$$= k \left[\frac{e^{a/k} (e^{C_1} - e^{-C_1}) - e^{-a/k} (e^{C_1} - e^{-C_1})}{2} \right]$$

dunque:

$$b = k \left[\frac{(e^{a/k} - e^{-a/k})(e^{C_1} - e^{-C_1})}{4} \right]$$

e quindi:

$$b = k \cdot \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh(C_1) \quad (\text{C.4})$$

Dividendo membro a membro la (C.4) e la (C.3) si ottiene:

$$\tanh(C_1) = \frac{2 \cdot b}{L}$$

e quindi:

$$C_1 = \operatorname{atanh}\left(\frac{2 \cdot b}{L}\right) \quad (\text{C.5})$$

Per determinare C_2 si utilizza la seconda delle (C.2):

$$b = C_2 + k \cdot \cosh\left(\frac{a}{k} + C_1\right)$$

e, tenendo conto della (C.5):

$$C_2 = b - k \cdot \cosh\left[\frac{a}{k} + \operatorname{atanh}\left(\frac{2 \cdot b}{L}\right)\right] \quad (\text{C.6})$$

Resta da ricavare l'espressione di L in funzione dei parametri noti a , b e k ; dalla ultima delle (A.3) e dalla (C.5) si ricava che:

$$\sinh(C_1) = \frac{\frac{2b}{L}}{\sqrt{1 - \frac{4b^2}{L^2}}} = \frac{2b}{\sqrt{L^2 - 4b^2}} \quad (\text{C.7})$$

sostituendo la (C.7) nella (C.4) si ottiene:

$$b = k \cdot \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \frac{2b}{\sqrt{L^2 - 4b^2}}$$

da cui

$$L^2 = \left[2k \cdot \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \right]^2 + 4b^2$$

e finalmente

$$L = \sqrt{4k^2 \cdot \sinh^2\left(\frac{a}{k}\right) + 4b^2} \quad (\text{C.8})$$

Per determinare l'ascissa x_M del punto di minimo M della curva si impone che:

$$z'(x_M) = \sinh\left[\frac{x_M}{k} + \operatorname{atanh}\left(\frac{2b}{k}\right)\right] = 0$$

e quindi

$$x_M = -k \cdot \operatorname{atanh}\left(\frac{2b}{L}\right)$$

D. DETERMINAZIONE DELLA FORZA ESERCITATA DAL VENTO SUL CONDUTTORE

L'applicazione della legge di Bernoulli ci dice che la forza di trascinamento a cui è sottoposto un corpo immerso in un fluido che scorre con velocità V è pari a:

$$F_T = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho_F \cdot A_F \cdot V^2 \quad [\text{N}] \quad (\text{D.1})$$

dove C_x è il coefficiente di penetrazione aerodinamica, ρ_F è la densità del fluido e dove per A_F si intende l'area proiettata dal corpo sul piano ortogonale a quello di scorrimento del flusso, detta area frontale [4].

Per determinare il coefficiente C_x ci si riferisce alla *teoria dei modelli* grazie alla quale partendo da risultati di esperimenti condotti su modelli in scala del sistema da studiare, è possibile ricavare le grandezze caratteristiche del sistema reale. In particolare la teoria dei modelli afferma che per poter studiare il problema di un corpo di dimensione caratteristica D con un modello in scala, tale modello deve avere lo stesso *numero di Reynolds* Re del sistema reale cioè:

$$\operatorname{Re}_{\text{modello}} = \frac{V_{\text{modello}} \cdot D_{\text{modello}}}{\nu_{\text{fluido}}} = \operatorname{Re}_{\text{sistema}} = \frac{V_{\text{sistema}} \cdot D_{\text{sistema}}}{\nu_{\text{fluido}}} \quad (\text{D.2})$$

dove ν_{fluido} è la viscosità cinematica del fluido in m^2/s . La (D.2) ci dice che per un modellino in scala 1:10 bisogna utilizzare una velocità del del fluido dieci volte più grande di quella del sistema reale. Grazie alla teoria dei modelli sono disponibili dei grafici (i cosiddetti profili NAKA) in cui, per forme geometriche elementari, sono riportati gli andamenti di C_R in funzione di Re ; per il cilindro e la sfera si veda la Fig. 8.

Venendo al caso particolare delle sollecitazioni esercitate dal vento sui conduttori di elettrodotti è necessario procedere come segue: visto che si è interessati alla forza di trascinamento che il vento esercita *su un metro di conduttore*, si deve normalizzare la (D.1) per l'unità di lunghezza; considerato che $A_F = d_c \cdot L$, dividendo per L si ottiene:

$$F_{T_L} = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho_F \cdot d_c \cdot V^2 \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad (D.3)$$

Procedendo rigorosamente, per ogni valore del diametro d_c e della velocità del vento V si dovrebbe determinare il numero di Reynolds ed utilizzare il grafico di Fig. 8 per determinare il coefficiente C_R da utilizzare nella (D.3) che dipende dunque da d_c e V , sia esplicitamente, sia implicitamente attraverso il coefficiente C_x .

In questa trattazione è stato utilizzato un approccio semplificato secondo il quale si stabilisce una volta per tutte un valore tipico di C_x e si considera dunque la sola dipendenza esplicita della F_{T_L} da d_c e V ; ciò è giustificato anche dal fatto che il valore di C_x rimane abbastanza stabile al variare di d_c e V , come verrà evidenziato nel prossimo paragrafo.

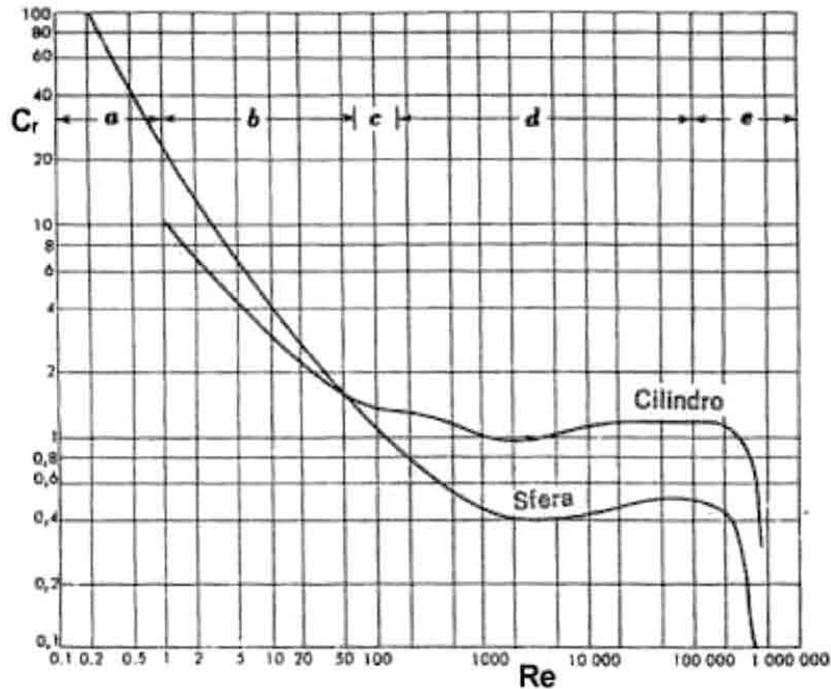


Fig. 8: Profilo NAKA per cilindro e sfera

D.1. Determinazione del coefficiente C_x tipico per i conduttori

Considerando come valori estremi per il diametro dei conduttori un minimo di 15 millimetri ed un massimo di 40 millimetri ed assumendo per il vento un minimo di 1 m/s (3,6 km/h) e un massimo di 36 m/s (130 km/h), si ottiene per il numero di Reynolds:

$$\begin{cases} \text{Re}_{\min} = \frac{0,015 \cdot 1}{17 \cdot 10^{-6}} \approx 900 \\ \text{Re}_{\max} = \frac{0,04 \cdot 36}{17 \cdot 10^{-6}} \approx 84700 \end{cases}$$

dove si è assunto $v_{\text{fluido}} = 17 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Utilizzando il grafico di Fig. 8 si ricava che, in corrispondenza dei estremi valori estremi di Re determinati, il coefficiente C_x vale:

$$\begin{cases} C_{x_{Re\max}} = 1,2 = C_{\max} \\ C_{x_{Re\min}} = 1,1 \neq C_{\min} \end{cases}$$

Il massimo per C_x si ottiene in corrispondenza di Re_{\max} , mentre il valore minimo per C_x viene raggiunto in corrispondenza di $Re \approx 2000 < Re_{\max}$ e vale $C_{\min}=0.99$.

Il valore di C_x utilizzato nella (D.3) è quello al centro dell'intervallo con estremi C_{\min} e C_{\max} , cioè:

$$C_x = 1,1 \quad (D.4)$$

D.2. Determinazione della forza di trascinamento per unità di lunghezza

Per poter scrivere la (D.3) nella forma $F_{T_L} = costante \cdot d_c \cdot V^2$ manca da determinare la densità dell'aria; per fare ciò si utilizza la equazione dei gas perfetti per una mole d'aria alla temperatura di 293 °K e assumendo che la massa molare dell'aria sia $M_m=29 \cdot 10^{-3}$ kg/moli:

$$\rho_{aria} = M_m \cdot \frac{1}{Vol} = M_m \cdot \frac{P}{R \cdot T} = 29 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1,01325 \cdot 10^5}{8,3143 \cdot 293} \approx 1,21 \frac{kg}{m^3} \quad (D.5)$$

dove si è indicato il volume con Vol invece che col canonico simbolo V per non confonderlo con la velocità del vento e dove si è assunta la pressione ambiente pari ad una atmosfera (101325 Pa).

L'espressione assunta per la forza di trascinamento per unità di lunghezza di conduttore è dunque la seguente:

$$F_{T_L} = \frac{1}{2} \cdot 1,1 \cdot 1,21 \cdot d_c \cdot V^2 \approx 0,67 \cdot d_c \cdot V^2 \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad (D.6)$$

dove la costante 0,67 ha le dimensioni di una densità volumetrica di massa.