

Confronto fra due approcci per la valutazione dell'influenza del terreno nel calcolo del campo magnetico generato da elettrodotti

Bini, M.
Zoppetti, N.

Istituto di Fisica Applicata Nello Carrara (IFAC) CNR, Via Panciatichi 64, 50100 Firenze
M.Bini@ifac.cnr.it, N.Zoppetti@ifac.cnr.it

Abstract

In questo articolo viene presentato un raffronto tra due approcci secondo i quali è possibile calcolare i campi elettromagnetici generati da linee elettriche tenendo conto delle correnti che questi inducono nel terreno. In particolare, ne verrà evidenziata la sostanziale equivalenza ai fini pratici, anche se i due metodi differiscono notevolmente in complessità e impegno nella soluzione. In effetti uno comporta la risoluzione del problema elettromagnetico completo, mentre l'altro si basa su approssimazioni così dette *quasi statiche*, che permettono di calcolare in maniera indipendente il campo elettrico e quello magnetico. Tale raffronto consente da un lato di valutare l'entità delle approssimazioni adottate con il metodo quasi statico e dall'altro di interpretare fisicamente i legami fra le correnti indotte nel terreno e i campi da queste generati.

I. INTRODUZIONE

Esistono situazioni nelle quali è necessario tenere conto della presenza del terreno nel calcolo del campo magnetico generato da elettrodotti; tra queste figura il caso di terreni particolarmente conduttivi o quello di calcoli eseguiti a grande distanza dalle sorgenti di campo. Per trattare queste evenienze si possono utilizzare vari metodi, che si differenziano per il diverso livello a cui viene spinta la trattazione analitica. Escludendo approcci che prevedono la diretta integrazione delle equazioni di Maxwell in un dominio discretizzato (es. tecnica delle differenze finite), in questo articolo verranno confrontati due metodi che prevedono la risoluzione analitica di una parte del problema, per ricondursi quindi ad un numero limitato di integrazioni numeriche in una sola variabile.

I due metodi comparati, presentati con maggior dettaglio in [1] e [2], adottano un modello a simmetria cilindrica secondo il quale ciascun conduttore è rappresentato come rettilineo indefinito e con conducibilità infinita ed il terreno come un mezzo omogeneo di conducibilità finita, che si estende nel semispazio $y < 0$ (Figura 1). Per semplicità, ci limitiamo qui al caso di *linea monofilare* che permette di concentrarsi sul confronto fra i metodi di soluzione piuttosto che sulle complicazioni di un modello complesso. L'estensione al caso di più fili si ottiene, per entrambi gli approcci, applicando il principio di sovrapposizione, come discusso ad esempio in [1] e in [2].

La grande differenza tra i due metodi consiste nel fatto che, mentre uno introduce sin dall'inizio delle approssimazioni che semplificano la risoluzione delle equazioni, ed in particolare trascura la *densità di corrente di spostamento*, l'altro prevede la risoluzione rigorosa delle equazioni senza nessuna approssimazione, utilizzando la scomposizione in modi TM e TE, tipica nello studio della propagazione guidata ad alte frequenze.

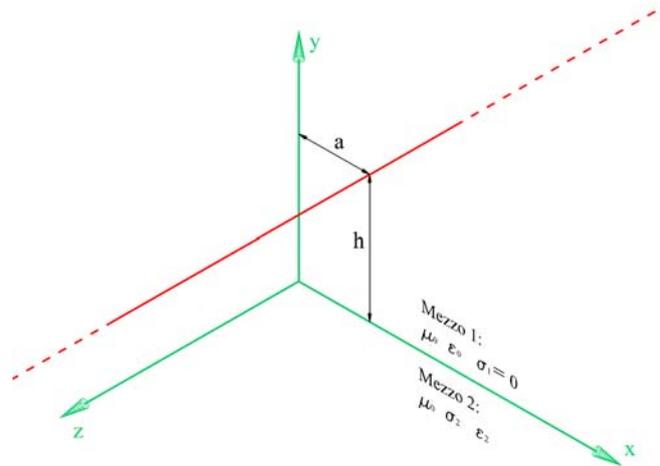


Figura 1: Modello monofilare

II. APPROCCIO QUASI STATICO (QS)

Secondo il metodo quasi statico (QS), presentato in maniera un po' più dettagliata in [1], il calcolo del campo elettrico e quello del calcolo del campo magnetico vengono trattati come due problemi fra loro sostanzialmente disaccoppiati. Il *campo elettrico* è calcolato assimilando il terreno a un semimondo di costante dielettrica complessa $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - j\sigma_2 / \omega\epsilon_0 \cong -j\sigma_2 / \omega\epsilon_0$ e risolvendo il problema elettrostatico dei conduttori (nel nostro caso il filo) in presenza del terreno utilizzando una generalizzazione del *principio delle immagini*. Il *campo magnetico* è calcolato determinando il campo primario e le correnti indotte nel terreno con una tecnica analoga a quella usata nel calcolo delle

correnti parassite (eddy currents)[3]. Il metodo QS a cui qui ci riferiamo è caratterizzato da un'approssimazione più accurata di quella impiegata nella maggior parte dei programmi di calcolo [4], i quali implementano metodi quasi statici che possono essere considerati di approssimazione zero (QS0). Infatti in questi metodi, il terreno è assimilato a un piano di conducibilità infinita per il calcolo del campo elettrico, mentre per il calcolo del campo magnetico la presenza del terreno è completamente ignorata.

In particolare l'induzione magnetica può essere ricavata attraverso la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot [I \cdot \delta(x-a) \cdot \delta(y-b) \hat{z} + \vec{J}_{indotta}] \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

dove I è la corrente che scorre sul conduttore mentre $J_{indotta}$ è la densità di corrente nel terreno. La soluzione del sistema può essere ricondotta a quella dell'equazione di Laplace nel mezzo 1 (aria) e all'equazione di Helmholtz nel mezzo 2 (terreno) per il potenziale vettore \vec{A} (si ricordi: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_1 &= 0 \\ \nabla^2 A_2 &= j\mu_0\sigma_2 A_2 \end{aligned}$$

Tenendo conto delle opportune condizioni al contorno per i campi all'interfaccia aria-terreno ed imponendo inoltre che il campo nel terreno tenda a zero all'aumentare della distanza dalla superficie, si può dimostrare che [1]:

$$\begin{aligned} B_{1x}(x, y) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \left(e^{-|y-h|k} - \frac{k-q}{k+q} e^{-(y+h)k} \right) \cos[k(x-a)] dk \\ B_{1y}(x, y) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \left(e^{-|y-h|k} + \frac{k-q}{k+q} e^{-(y+h)k} \right) \sin[k(x-a)] dk \\ A_{2z}(x, y) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-hk+qy}}{k+q} \cos[k(x-a)] dk \end{aligned}$$

dove $q = \sqrt{k^2 + j\omega\mu_0\sigma_2}$ ed il significato delle altre grandezze è indicato in Figura 1. La componente di \vec{B} lungo z è comunque nulla in virtù del fatto che le correnti sia sul conduttore che nel terreno e così anche il potenziale vettore sono diretti lungo z . Per calcolare le due componenti non nulle del campo magnetico sono dunque necessarie due integrazioni numeriche.

III. APPROCCIO COMPLETO (CT)

Una analisi completa del problema è ottenuta risolvendo il sistema delle quattro equazioni di Maxwell (che qui non scriviamo, per brevità), senza trascurare il termine delle correnti di spostamento nella equazione relativa al rotore di \vec{B} .

In particolare, con una tecnica comunemente utilizzata nei problemi di propagazione, si procede rappresentando i campi in ciascuno dei due mezzi mediante la sovrapposizione di due *modi*, fra loro indipendenti, detti modo TM e modo TE, i quali differiscono fra loro per avere *nulla* la componente secondo la direzione di propagazione z rispettivamente del campo magnetico (modo TM) e del campo elettrico (modo TE). La procedura di calcolo, che è troppo laboriosa per essere qui riportata, è condotta, dapprima supponendo la presenza della sola onda incidente sul carico, cioè imponendo per la corrente di linea un andamento del tipo $I(z) = I_0 e^{-\gamma z}$ ed in seguito applicando la sovrapposizione degli effetti, aggiungendo l'onda riflessa, cioè imponendo che $I(z) = I_0 e^{-\gamma z} + \Gamma_0 I_0 e^{+\gamma z}$. Nel caso in cui sia il conduttore che il terreno siano conduttori perfetti il coefficiente γ sarà un numero immaginario puro, cioè $\gamma = j2\pi/\lambda = j2\pi f/c$, dove λ è la lunghezza d'onda in aria, c la velocità della luce ed f (50 Hz) è la frequenza dell'eccitazione. In generale, nel caso di conduttori reali e, in particolare, di terreno con conducibilità finita, γ ha parte reale non nulla.

Le condizioni al contorno che devono essere rispettate sono (1) la continuità dei campi attraverso l'interfaccia tra i due mezzi e (2) l'annullamento del campo elettrico tangente alla superficie del conduttore.

L'approccio completo (CT) prevede almeno quattordici integrazioni numeriche: una per determinare il coefficiente γ , un'altra per determinare l'impedenza caratteristica della linea e quindi il coefficiente di riflessione Γ_0 ; infine, noti γ e Γ_0 , dodici integrazioni per determinare la parte TE e quella TM di ciascuna componente x, y, z dei vettori del campo, sia per l'onda incidente che per quella riflessa. Riportiamo, come esempio, la parte TE della componente lungo x del vettore induzione in aria relativa alla sola onda incidente sul carico:

$$B_{1xTE}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma\alpha}{\omega} A_{3\alpha y_0}(x, y) \cdot e^{-\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2 + j\omega\mu_0(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \cdot y} \cdot e^{j\alpha x} d\alpha$$

dove si omette per brevità l'espressione di $A_{3\alpha y_0}(x, y)$ in cui è "nascosta" la dipendenza da a , h ed I .

Le quattordici integrazioni possono essere ridotte a dieci se si decide di trascurare la componente di \vec{B} lungo z che, anche se in linea di principio non è nulla, è di entità molto più modesta delle altre due, come vedremo nell'esempio numerico del prossimo paragrafo. In effetti, questa deriva dalle correnti indotte nel terreno che scorrono su piani perpendicolari a z per controbilanciare la variazione sinusoidale della carica netta sul conduttore. Tali correnti sono calcolabili anche con il metodo quasi statico ma data la modesta entità non vengono considerate nel calcolo dell'induzione magnetica. Le otto integrazioni relative alle componenti di campo lungo x e y possono essere raggruppate in modo da portare sotto lo stesso segno di integrale i quattro termini (TE incidente/riflessa e TM incidente/riflessa) relativi a ciascuna direzione cosicché le integrazioni da effettuare diventano quattro. Nonostante tali semplificazioni è evidente la maggiore complessità dell'approccio completo rispetto a quello quasi statico. Tuttavia l'approccio CT ha il pregio di derivare i campi in maniera rigorosa dalle equazioni di Maxwell, permettendo così di verificare con sicurezza la precisione dei risultati ottenuti con il metodo quasi statico.

IV. ESEMPIO NUMERICO DI CONFRONTO

Sono state calcolate le componenti dei campi \vec{E} e \vec{B} e della densità di corrente nel terreno \vec{J} , sia con l'approccio quasi statico che con quello completo. In particolare, riportiamo qui alcuni risultati relativi al modulo dell'induzione magnetica B calcolati ad 1 metro da terra e con conducibilità del terreno $\sigma_2 = 10^{-1}$ S/m. Nella Figura 2 la curva visibile come un'unica linea a tratto pieno corrisponde a due curve relative al calcolo di B con l'approccio completo e con quello quasi statico; la curva tratteggiata si riferisce invece al campo del solo conduttore della linea (legge di Biot-Savart). Come appare evidente dalla Figura, in condizioni corrispondenti a situazioni di comune interesse pratico, non è possibile riscontrare differenze che siano apprezzabili con la normale risoluzione grafica. È tuttavia interessante, almeno ma non solo da un punto di vista teorico, commentare questi risultati e sottolinearne alcuni particolari significativi.

Innanzitutto è bene specificare quali siano le condizioni (ad es. distanza dalla linea, numero dei conduttori ecc.) in cui porsi per massimizzare la significatività dell'analisi. Il parametro più importante è senza dubbio costituito dalla distanza dalla linea, la quale deve essere grande rispetto all'altezza dei conduttori dal suolo. È infatti abbastanza intuitivo che, mentre a breve distanza il risultato è dominato dal contributo del conduttore, è man mano che ci si allontana dalla linea che vengono a pesare i contributi delle correnti del terreno e che è pertanto a distanze maggiori che è possibile valutare più facilmente l'errore introdotto dall'approssimazione quasi statica. Aggiungiamo anche che sarebbe ancora più interessante poter utilizzare per il confronto il modello di una linea a più conduttori percorsi da correnti opportunamente sfasate, come ad es. un elettrodotto trifase. Infatti in questo caso le correnti nel terreno, che hanno una distribuzione meno concentrata di quella sui fili della linea, pesano a distanza in maniera più accentuata rispetto a quella dei fili primari. Purtroppo, i limiti di spazio non ci permettono di portare avanti questa analisi, per la quale si rimanda a [1].

Posto $x=500$ m, $y=1$ m, $a=0$ m, $h=30$ m e $\sigma=0,1$ S/m si ha che:

$$\vec{B}_{completo} = \begin{pmatrix} 0,245 - j \cdot 0,042 \\ 0,109 - j \cdot 0,138 \\ 3 \cdot 10^{-5} - j \cdot 4,4 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \mu T$$

$$\vec{B}_{quasistatico} = \begin{pmatrix} 0,245 - j \cdot 0,042 \\ 0,109 - j \cdot 0,138 \\ 0 \end{pmatrix} \mu T$$

mentre per il campo dovuto alla sola corrente sul conduttore si avrebbe: $B_x = 0.023 \mu T$ e $B_y = 0.399 \mu T$.

Ponendo $y=-1$ m (cioè, il punto è ora all'interno del terreno) e lasciati invariati tutti gli altri parametri si ottengono valori pressoché identici a quelli sopra la superficie del terreno, come c'era da aspettarsi dato che \vec{B} è continuo attraverso

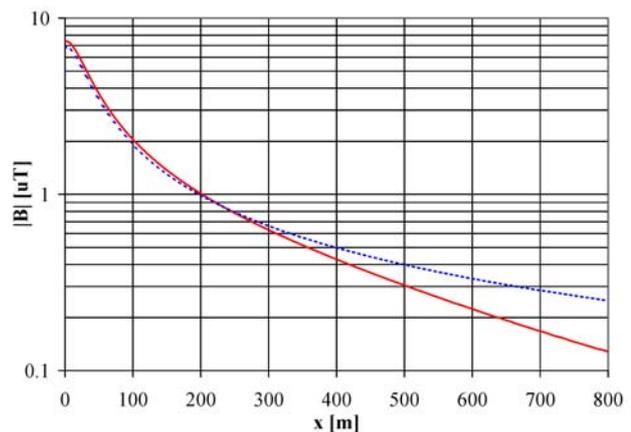


Figura 2: induzione magnetica ad 1 metro da terra.
Linea continua (—): calcolo del campo B con il metodo completo e con quello quasi statico
Linea tratteggiata (---): contributo del solo conduttore primario



l'interfaccia.: Si noti, inoltre, che l'induzione magnetica calcolata secondo l'approccio quasi statico ha componente lungo z nulla mentre le componenti lungo x e y sono coincidenti con quelle calcolate secondo l'approccio completo.

Il comportamento dell'induzione magnetica è perfettamente in linea con quanto ci si può aspettare dall'analisi della densità di corrente, della quale riportiamo più sotto i valori calcolati per $x = 500$ m e $y = -1$ m. La componente lungo z , cioè quella dominante, coincide per i due approcci e determina la relativa uguaglianza delle componenti B_x e B_y dell'induzione. Si osserva anche un'ottima corrispondenza tra le componenti J_x e J_y che generano la componente lungo z dell'induzione magnetica calcolata, per semplicità, solo secondo l'approccio completo.

$$\vec{J}_{\text{completo}} = \begin{pmatrix} 1,38 \cdot 10^{-9} - j \cdot 2,78 \cdot 10^{-7} \\ -2,25 \cdot 10^{-10} - j \cdot 1,67 \cdot 10^{-8} \\ -1,425 \cdot 10^{-3} - j \cdot 5,042 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \frac{A}{m^2} \quad \vec{J}_{\text{quasistatico}} = \begin{pmatrix} 7,8 \cdot 10^{-15} - j \cdot 2,79 \cdot 10^{-7} \\ -j \cdot 1,73 \cdot 10^{-8} \\ -1,425 \cdot 10^{-3} - j \cdot 5,042 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \frac{A}{m^2}$$

V. CONCLUSIONI

Sono stati confrontati due metodi (metodo quasi statico QS e metodo completo CT) per il calcolo dei campi elettrici e magnetici prodotti dalle linee per il trasporto dell'energia elettrica a 50 Hz. Le limitazioni di spazio hanno costretto ad una presentazione estremamente sommaria; inoltre, per lo stesso motivo, è stato necessario limitare il modello utilizzato per i calcoli ad una linea costituita da un solo filo, il che rende la trattazione non immediatamente confrontabile con i risultati sperimentali. Tuttavia quanto esposto dovrebbe essere sufficiente per lo scopo dell'articolo che è quello di mettere a confronto i risultati ottenuti con i due metodi e valutarne i rispettivi pregi e difetti.

Il metodo CT ha il merito di impostare e risolvere il problema in maniera rigorosa, scomponendo la soluzione in modi TM e TE. Per ciascun modo, la soluzione è espressa in forma integrale e ha la forma di un'onda incidente e un'onda riflessa, tipica dei problemi di propagazione guidata. La soluzione di uno specifico problema si ottiene quindi dalla sovrapposizione delle varie onde in modo tale da ottenere le prescritte condizioni di tensione e corrente sul carico. La procedura di calcolo è lineare, ma abbastanza pesante, e la soluzione è purtroppo scarsamente intuitiva. In effetti, mentre nel caso delle linee di trasmissione ad alta frequenza si opera in genere con il modo fondamentale (TEM, TE₁₀, ecc) e su carico adattato e pertanto l'onda incidente ha un rilevante significato fisico, nel caso della linea per il trasporto di energia elettrica il carico è in genere disadattato e la soluzione, data dalla sovrapposizione di onde incidente e riflessa dei modi TE e TM, è sì esatta nel suo insieme ma ha una forma che non guida all'intuizione del fenomeno.

L'approccio QS introduce fin dall'inizio un'approssimazione nella scrittura delle equazioni che separa il calcolo del campo elettrico da quello del campo magnetico. La soluzione si riduce pertanto a quella di due problemi più semplici la cui trattazione fa ricorso a metodologie e tecniche tipiche nel campo dell'elettrotecnica.

Ad esempio, per il calcolo del *campo elettrico* E si fa ricorso a metodi standard in elettrostatica (soluzione dell'equazione di Laplace in mezzi stratificati) con la sola differenza che i campi variano nel tempo alla frequenza di 50 Hz e le proprietà del mezzo diventano pertanto quantità complesse. Inoltre la soluzione può essere rappresentata mediante il principio delle immagini, che ne permette una più immediata "visualizzazione".

Analogamente, per il *campo magnetico*, la soluzione è ottenuta con le tecniche utilizzate per il calcolo delle *correnti parassite*, che permettono di intuire il comportamento delle correnti indotte nel terreno e i campi da queste prodotti.

Infine, l'introduzione delle approssimazioni nelle equazioni di partenza riduce notevolmente la complessità delle soluzioni e i tempi di computazione.

Il principale svantaggio dell'approccio QS è che l'introduzione delle approssimazioni nelle equazioni di Maxwell fin dalla partenza impedisce di avere una valutazione quantitativa dell'errore così introdotto nella soluzione.

Il confronto fra i due approcci effettuato in questo articolo non solo fornisce una valutazione quantitativa dell'errore introdotto dal metodo QS ma mostra che questo è del tutto trascurabile. La verifica quindi, tranquillizzando sull'entità degli errori del metodo QS, permette l'utilizzo di questo (con tutti i vantaggi di maggiore controllo sul comportamento della soluzione e la minore pesantezza computazionale dei metodi quasi statici), in quei casi in cui il metodo QS0 non è sufficientemente accurato.

VI. REFERENZE

- [1] M.Bini, D.Andreuccetti, R.Olmi, N.Zoppetti: "Effetti del terreno nel calcolo dei campi elettrico e magnetico prodotti da linee elettriche", Atti del XIV RiNEm (Riunione Nazionale di Elettromagnetismo) pp. 105-108, Settembre 2002, Ancona; Atti scaricabili da: <http://www.ee.unian.it/conf/RiNEm2002/index1.php>
- [2] L.M. Wedepohl, A.E. Efthymiadis, "Wave propagation in transmission lines over lossy ground: a new complete field solution", Proceedings IEE Vol. 125 No. 6 pp. 505-508 June 1978.
- [3] J.A Tegopoulos and E.E. Kries: "Eddy currents in linear conducting media", Elsevier 1985.
- [4] Ad esempio: Guida ai metodi di calcolo dei campi elettrici e magnetici generati da linee elettriche, Norma CEI 211-4, 1996.