



Istituto di Fisica Applicata "N.Carrara" - del Consiglio Nazionale delle Ricerche  
Via Panciatichi, 64 - 50127 Firenze - Italia

# LE ONDE ELETTROMAGNETICHE ASPETTI FISICO-MATEMATICI

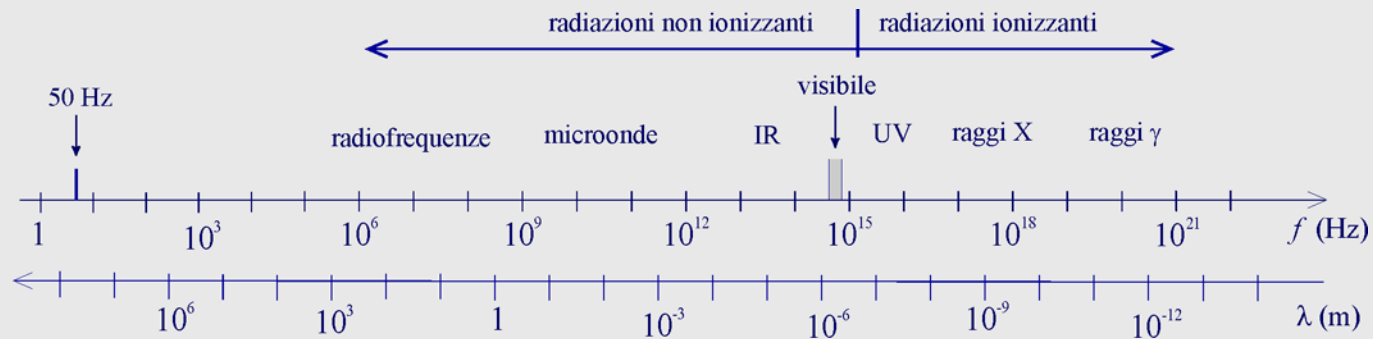
*Marco Bini*

IFAC-CNR, Firenze -Italia

Giornata di studio per docenti "Lo spettro delle onde elettromagnetiche"  
ESI - 12 ottobre 2005

# Lo spettro elettromagnetico

$$f \cdot \lambda = c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



## Alcuni valori tipici

	NON ionizzanti					Ionizzanti		
	rete	RF	MO	IR	Visib.	UV	X	$\gamma$
$f$ (Hz)	50	$10^6$	$10^9$	$10^{13}$	$6 \times 10^{14}$	$1.2 \times 10^{15}$	$10^{18}$	$1.25 \times 10^{20}$
$\lambda$ (m)	$6 \times 10^6$	300	0.3	$3 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-7}$	$2.5 \times 10^{-7}$	$3 \times 10^{-10}$	$2.5 \times 10^{-12}$
$hf$ (eV)	$2 \times 10^{-13}$	$4 \times 10^{-9}$	$4 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-2}$	2.5	5	$4 \times 10^3$	$0.5 \times 10^6$

Energia del fotone,  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec} = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV/Hz}$

rottura legame covalente

# Vettori del campo elettromagnetico (EM)

$\vec{E}$  vettore *campo elettrico* (V/m)

$\vec{H}$  vettore *campo magnetico* (A/m)

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H} / \mu_0)$  *Legge di Lorentz*: forza esercitata su una carica  $q$  che si muove a velocità  $\vec{v}$  (serve a definire  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ )

$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  vettore *induzione o spostamento elettrico* (C/m<sup>2</sup>)

$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$  vettore *induzione magnetica* (T)

$\epsilon$  *costante dielettrica o permittività*;  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m (farad/metro), cost. diel. del vuoto;  
 $\epsilon_r$  *costante dielettrica relativa*; nel vuoto  $\epsilon_r = 1$

$\mu$  *permeabilità magnetica*;  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m (henry/metro), permeabilità mag. del vuoto;  
 $\mu_r$  *permeabilità mag. relativa*; nello spazio vuoto  $\mu_r = 1$

# Equazioni di Maxwell: forma differenziale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \text{densità di corrente [A/m}^2\text{]} \\ &= \vec{J}_f(\vec{E}) + \vec{J}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{J}_f(\vec{E}) &= \text{determinata da } \vec{E} \\ \text{es.: } \vec{J} &= \sigma \vec{E}, \text{ corrente di conduzione}\end{aligned}$$

$$\vec{J}_i = \text{corrente impressa}$$

operatori differenziali

$$\vec{\nabla} V \quad \longleftrightarrow \quad \text{grad} V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad \longleftrightarrow \quad \text{div } \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \longleftrightarrow \quad \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \nabla V = 0$$

Equazione di continuità

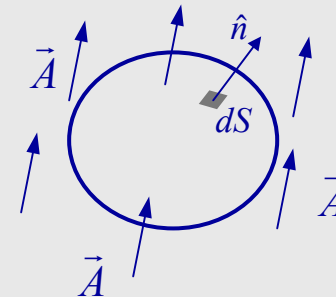
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## 2 Teoremi di analisi vettoriale

Dato un *campo vettoriale*  $\vec{A}$  si hanno queste identità:

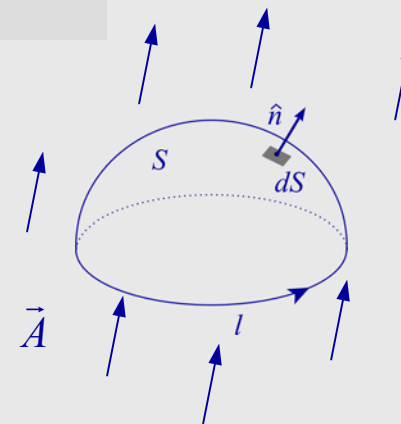
- Teorema della divergenza: Il flusso di  $\vec{A}$  attraverso la superficie chiusa  $S$  è uguale all'integrale della divergenza di  $\vec{A}$  nel volume  $V$  racchiuso da  $S$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$$



- Teorema della circuitazione: la *circuitazione* di  $\vec{A}$  sulla linea chiusa  $l$  è uguale al *flusso del rotore* di  $\vec{A}$  attraverso una qualsiasi superficie  $S$  che si appoggia ad  $l$

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

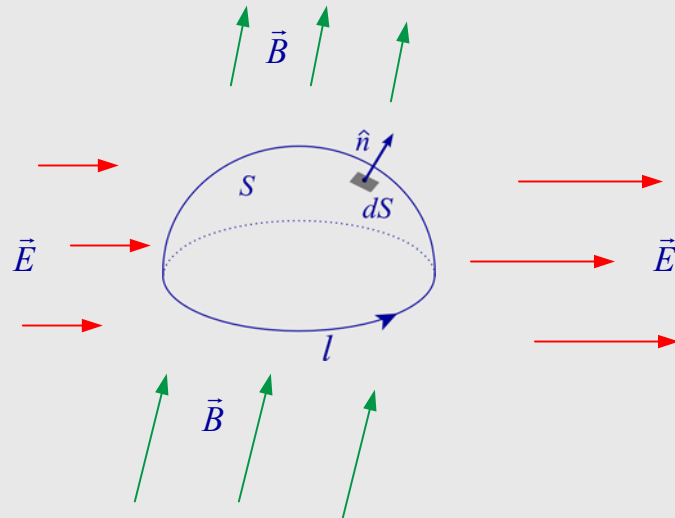


# Equazioni di Maxwell: **forma integrale**

Flusso attraverso  $S$   
di ambedue i membri

Teorema della circuitazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{aligned} \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS & \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{B})$$



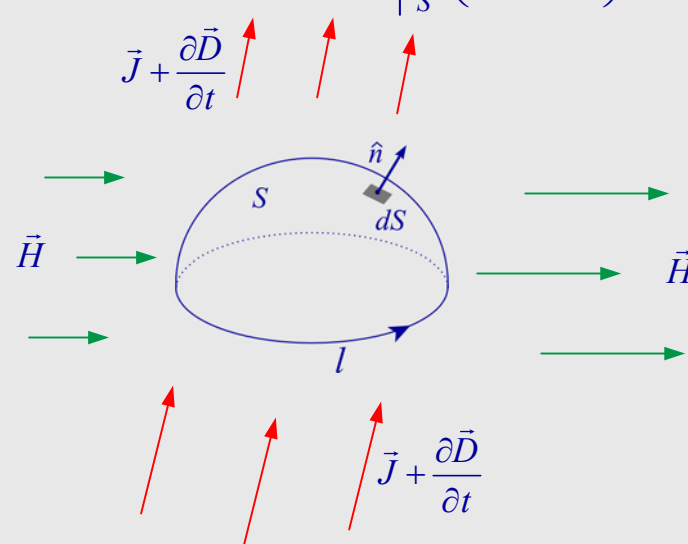
La *circuitazione* del vettore *campo elettrico*  $\underline{E}$  lungo una linea chiusa  $l$  è uguale al flusso dell'*induzione magnetica*  $\underline{B}$  attraverso una qualsiasi superficie  $S$  che ha  $l$  come bordo.

# Equazioni di Maxwell: **forma integrale**

Flusso attraverso  $S$   
di ambedue i membri

Teorema della circuitazione

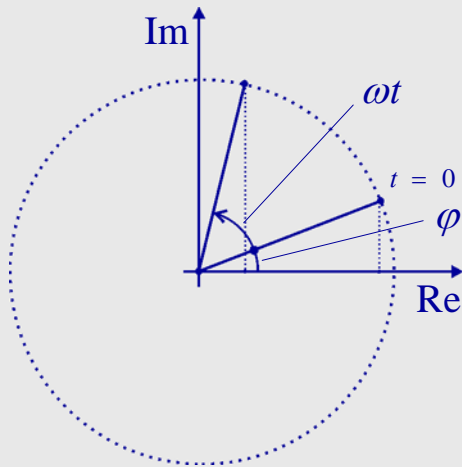
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS = I + \Phi_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$


La *circuitazione* del vettore *campo magnetico*  $\underline{H}$  lungo una linea chiusa  $l$  è uguale alla *corrente totale*, somma della corrente vera e propria  $I$  e della *corrente di spostamento*, flusso di  $\partial \vec{D} / \partial t$  attraverso una qualsiasi superficie  $S$  che ha  $l$  per bordo.

# Analisi armonica

- Funzione armonica (*oscillazione monocromatica*):  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$



$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad \longleftarrow \text{Formula di Eulero}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= A_m \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \operatorname{Re}\left(A_m e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = \operatorname{Re}\left(A e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

con:  $A = A_m e^{j\varphi}$  **fasore** corrispondente ad  $a(t)$

- *Analisi di Fourier*:

- Una *funzione*  $f(t)$  periodica di periodo  $T$  può essere ottenuta come somma di funzioni armoniche monocromatiche (*serie di Fourier*)
- Ogni *funzione*  $f(t)$  che rappresenti un fenomeno fisico può essere rappresentata come sovrapposizione di funzioni armoniche monocromatiche (*integrale di Fourier*)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



# Analisi simbolica

- I vettori e gli scalari del campo sono rappresentati mediante il prodotto di vettori e scalari complessi (funzioni dello spazio ma non del tempo) per la funzione  $e^{j\omega t}$ .  
Es.:  $\vec{E}e^{j\omega t} \leftarrow \vec{E}$ , vettore complesso
- In ciascuna equazione, si sostituisce l'operatore derivata rispetto al tempo  $\partial/\partial t$  con il fattore  $j\omega$  e l'operatore  $\int \cdot dt$  con  $1/j\omega$ . Gli operatori che agiscono sulle coordinate rimangono immutati;
- Si risolvono le Eq.i nelle funzioni incognite “fasoriali” e da queste si ricava la soluzione nel tempo moltiplicando per  $e^{j\omega t}$  e prendendo la *parte reale*.

**Esempio:**  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \partial H / \partial t \rightarrow \cancel{e^{j\omega t}} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \cancel{e^{j\omega t}} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}$

Le Eq.i di Maxwell divengono:

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} + \vec{J}_{\text{imp}} \end{array} \quad \leftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ equazioni differenziali nei 2 vettori} \\ \underline{E} \text{ ed } \underline{H} \text{ (complessi) che dipendono} \\ \text{dalle sole coordinate spaziali} \end{array} \right.$$

## Potenziali elettromagnetici

Variabili ausiliarie che aiutano a risolvere le equazioni del campo

$$\begin{cases} \text{Potenziale scalare} \rightarrow V & (\text{volt}) \\ \text{Potenziale vettore} \rightarrow \vec{A} & \left( \frac{\text{volt}}{\text{m}} \text{sec} \right) \end{cases}$$

Mezzo omogeneo con distribuzione di densità di carica  $\rho$  e di corrente  $\underline{J}$ ; i potenziali obbediscono all'Eq. di d'Alembert (per quantità fasoriali)

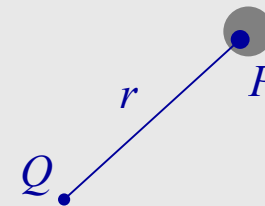
$$\nabla^2 V - k^2 V = -\rho / \epsilon$$

$$\nabla^2 \vec{A} - k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$



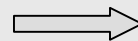
$$V(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \rho(P) \frac{e^{-jkr}}{r} d\tau$$

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \vec{J}(P) \frac{e^{-jkr}}{r} d\tau$$



$k$  è il *numero d'onda*:  $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu}$

Noti i potenziali, si calcolano i campi  $\underline{E}$  ed  $\underline{H}$



$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} V - j\omega \vec{A} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

## Approssimazione quasi-statica (q.s.)

I campi non variano nel tempo o variano “lentamente”

I campi sono quasi-statici (q.s.) quando il tempo  $T$  di variazione del campo è *molto maggiore* del tempo  $\tau$  che le perturbazioni del campo (che viaggiano alla velocità della luce  $c = 3 \times 10^8$  m/s) impiegano a percorrere la zona di spazio in cui i campi hanno valori significativi. Ovvero, la frequenza di oscillazione dei campi  $f = 1/T$  è *molto minore* di  $1/\tau$ .

Matematicamente:

$$\partial/\partial t \rightarrow 0$$

$$k = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu} \rightarrow 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

➡ I campi  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  risultano "disaccoppiati"

## Campo elettrico quasi-statico

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau$$

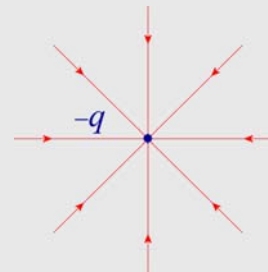
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\tau} \frac{\rho}{r^2} \hat{r} d\tau$$

Carica puntiforme  $\rho(P) = \delta(P - P_1)q$

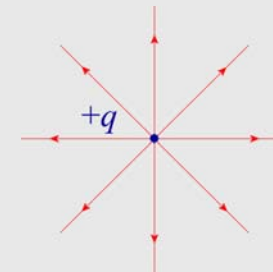
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

*Legge di Coulomb:* una carica elettrica  $q$  genera un campo elettrico  $\underline{E}$  le cui linee centrate su  $q$  hanno direzione radiale e puntano verso  $q$  o se ne allontanano a seconda se  $q$  è negativo o positivo; inoltre l'intensità di  $E$  decresce come  $1/r^2$

carica negativa



carica positiva

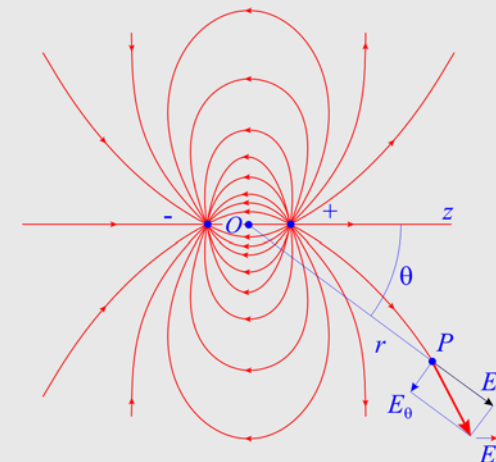
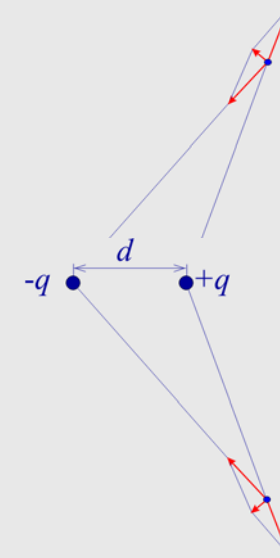


## Dipolo elettrico (q.s.)

1. Un dipolo è l'insieme di due cariche di uguale intensità  $q$  e segno opposto, poste ad una distanza che indichiamo con  $d$ ;
2. Il campo  $\underline{E}$  risulta dalla somma vettoriale del campo di ciascuna delle cariche; poiché il segno delle cariche è opposto i campi quasi si compensano
3. A distanza  $r \gg d$  il campo del dipolo ha questa espressione analitica:

$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon r^3} \left[ (2\cos\theta)\hat{r} + (\sin\theta)\hat{\theta} \right]$$

4. Il campo ha simmetria cilindrica intorno all'asse del dipolo
5. La compensazione, dovuta al segno opposto delle cariche, fa sì che a distanza i campi si attenuino come  $1/r^3$  (i termini in  $1/r^2$  si elidono)



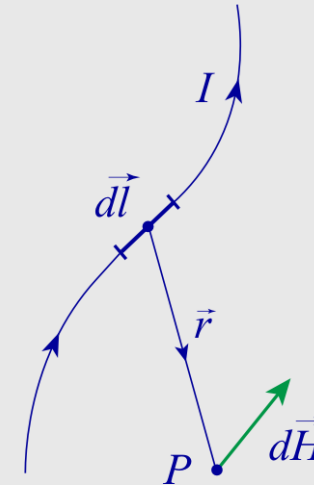
## Campo magnetico (q.s.)

- Dal potenziale vettore  $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{r} d\tau$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} / \mu = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} d\tau \longrightarrow \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_l I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$\vec{J} d\tau \leftrightarrow I d\vec{l}$

legge di Biot-Savart differenziale  $d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

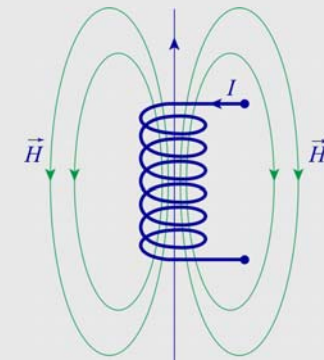
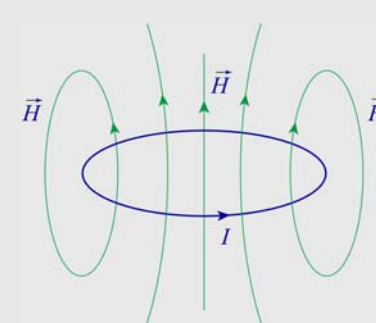
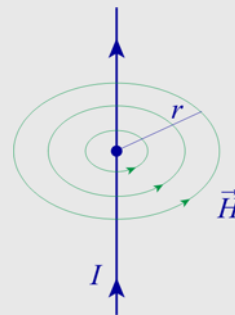


- Dalle Eq.i in forma integrale

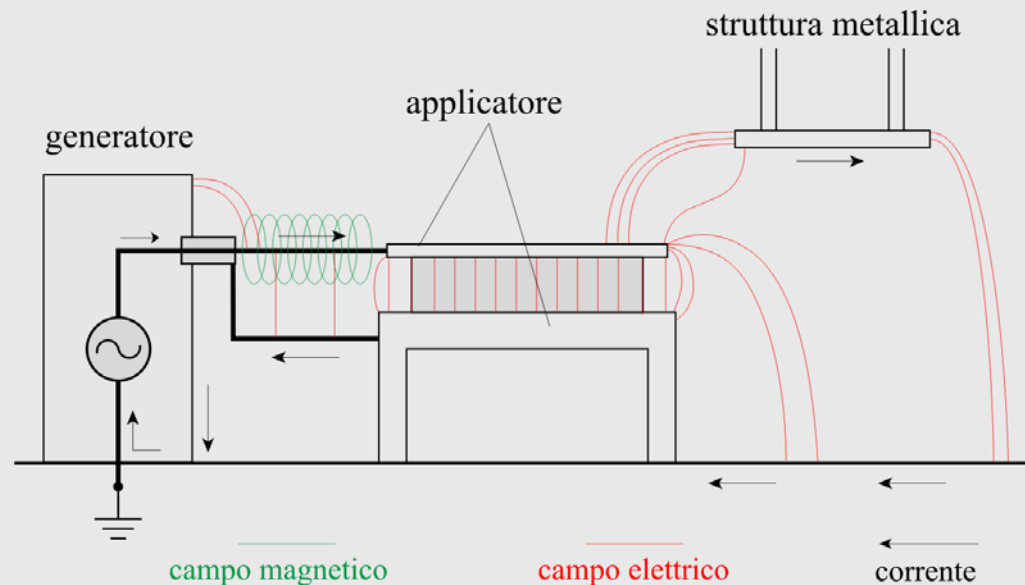
legge di Ampère  $\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \sum_m I_m$

legge di Biot-Savart

$$H = \frac{I}{2\pi r_a} \hat{\phi}$$



## Campo elettrico e magnetico q.s.



### Macchina per il trattamento termico di materiali

- Le linee del campo magnetico si richiudono in anelli intorno alle correnti.
- Le linee del campo elettrico vanno dall'elettrodo "caldo" verso l'altro elettrodo o verso la massa. La maggior parte sono concentrate all'interno dell'applicatore; Alcune però escono anche all'esterno (*fringing fields*) e possono accoppiarsi con strutture metalliche vicine, prima di richiudersi a massa.
- Le linee dei campi oscillano e invertono la direzione con la stessa frequenza del generatore.

## Energia del campo elettrico e magnetico

In ogni volumetto di spazio  $dV$  di un campo elettromagnetico è contenuta una certa quantità di *energia* esprimibile con le formule seguenti



### Energia elettrica

$$dW_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV \quad (\text{J}) \quad \longleftrightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (\text{J/m}^3) \quad \text{densità di energia}$$

NB. Se sono in uno stesso punto sono contemporaneamente presenti i due campi  $E_1$  ed  $E_2$ , l'energia totale  $W$  è in genere *diversa* dalla somma di quelle dei campi presi separatamente

$$W_t = \frac{1}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2) + \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \quad \neq \quad W_1 + W_2 = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2)$$

Le energie sono sommabili solo se  $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$  (campi *ortogonali*)

### Energia magnetica

$$dW_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \mu H^2 dV \quad (\text{J}) \quad \longleftrightarrow \quad W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (\text{J/m}^3) \quad \text{densità di energia}$$



## Campi armonici (dipendenza $e^{j\omega t}$ )

$W_e$  e  $W_m$  sono valori istantanei. Se  $\underline{E}$  ed  $\underline{H}$  oscillano nel tempo, anche  $W_e$  e  $W_m$  variano di conseguenza. Il *valor medio* (su un periodo di oscillazione) è diverso da zero ed è un parametro utile per descrivere gli scambi energetici.

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \int_T W(t) dt$$

Valor medio dell'energia immagazzinata

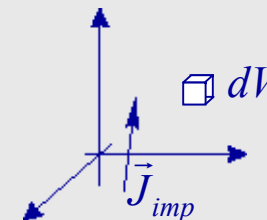
$$\overline{W}_e = \frac{1}{4} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad \overline{W}_m = \frac{1}{4} \varepsilon \vec{H} \cdot \vec{H}^* \quad \text{l'asterisco (*) indica il complesso coniugato}$$

Se  $E$  ed  $H$  sono espressi in *valore efficace* ( $V_m/\sqrt{2}$ ), allora la formula del valor medio sono formalmente identica a quella dei valori istantanei.

Potenza scambiata con le sorgenti e dissipata nel campo

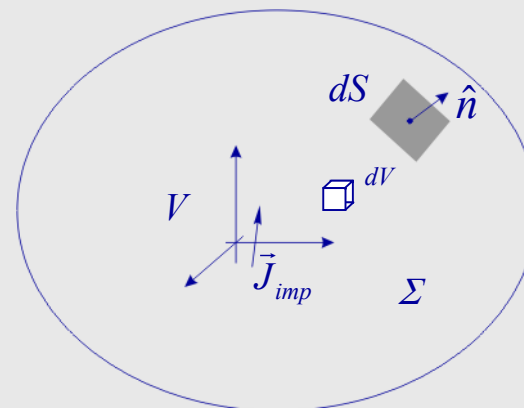
$$-d\overline{P}_g + d\overline{P}_d = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}_{imp}^* dV + \frac{1}{2} \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV$$

dove:  $\underline{J}_{imp}$  corrente impressa e  $\sigma$  conducibilità del mezzo



# Energia e flusso di potenza nel campo EM

- In ogni volume  $V$  il campo EM cede energia agli (eventuali) elementi dissipativi (corrente di conduzione  $\underline{J}_c = \sigma \underline{E}$ ), ne acquista dalle sorgenti ( $\underline{J}_{imp}$ ) e la scambia con il mondo esterno attraverso la superficie  $\Sigma$ , che delimita  $V$ ;
- L'applicazione del teorema della divergenza al vettore  $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^*$  (vettore di Poynting) dà:



$$\underbrace{-\frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_{imp}^* dV}_{P_{in} + jQ_{in}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV}_{P_d} + \underbrace{2j\omega \int_V \frac{\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{4} dV}_{\bar{W}_m - \bar{W}_e} + \underbrace{\frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot \hat{n} d\Sigma}_{P_u + jQ_u} \quad \leftarrow \text{Teorema di Poynting}$$

L'uguaglianza delle parti reali esprime la conservazione dell'energia (flusso di potenza):

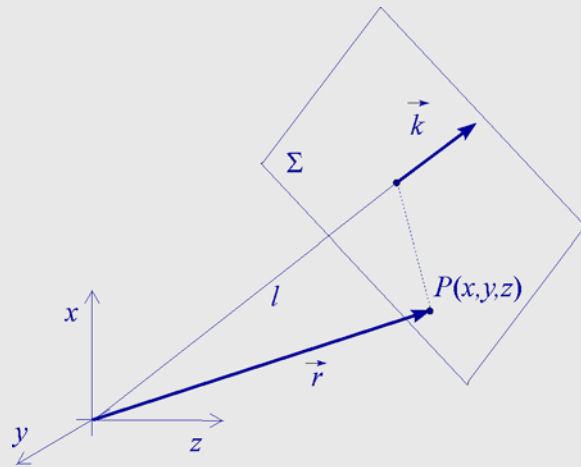
$$\underbrace{\text{Re} \left( -\frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_{imp}^* dV \right)}_{P_{in} = \text{Potenza immessa dal generatore}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV}_{P_d = \text{Potenza dissipata}} + \underbrace{\text{Re} \frac{1}{2} \left( \oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot \hat{n} d\Sigma \right)}_{P_u = \text{Potenza uscente da } \Sigma}$$

Se si immagina che la superficie  $\Sigma$  sia molto lontana, così che  $Q_u \rightarrow 0$ , allora si vede che le parti immaginarie esprimono il bilancio della *potenza reattiva*:

la potenza reattiva scambiata dal generatore è uguale alla differenza fra le energie medie immagazzinate  $\bar{W}_m - \bar{W}_e$  moltiplicata per  $2\omega$

## Onde elettromagnetiche: onda piana

- Un campo della forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  è soluzione delle Eq.i di Maxwell dove,  $\vec{E}_0$  vettore complesso indipendente da  $x, y, z$  e  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$



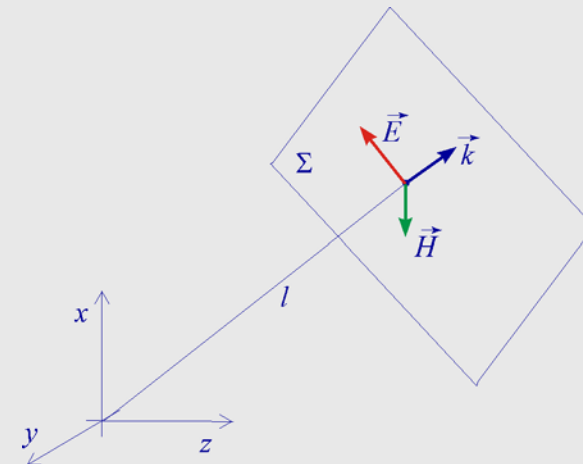
$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = k \cdot l$$



piano perpendicolare a  $\vec{k}$   
distante  $l$  dall'origine

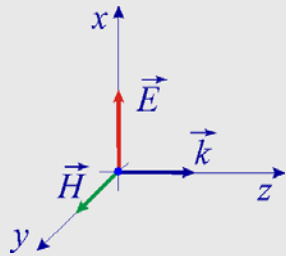
Dalle Eq.i di Maxwell:

- $0 = \vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{H}$
  - $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{k} \times \vec{E}$
  - $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cong 377\Omega$  nel vuoto
- $\vec{E}$  ed  $\vec{H} \perp$  a  $\vec{k}$   
 $\vec{E}$  ed  $\vec{H} \perp$  fra loro  
 $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$  terna destrorsa



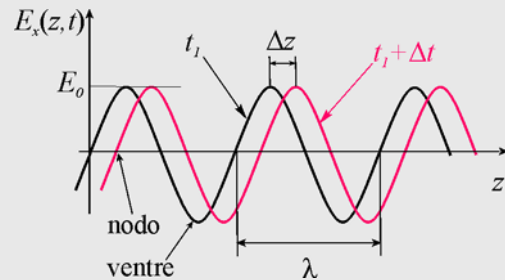
... Onda piana

$$\text{Re}(\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\omega t}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k l) \leftarrow \text{Quantità istantanea}$$



$$\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos(\omega t - k z)$$

$$\vec{H} = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - k z)$$



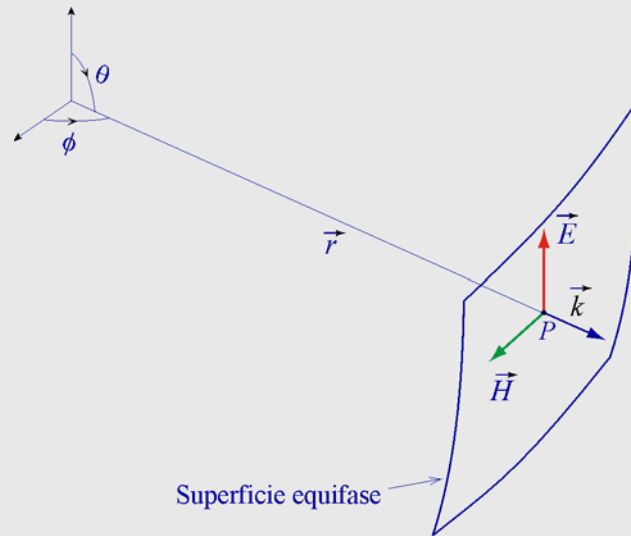
$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

$\omega t - k z = \omega(t + \Delta t) - k(z + \Delta z)$

Nel vuoto  $\longrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

L'onda piana è un'onda TEM

## Onde sferiche



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\theta} \frac{E_0(\theta, \phi)}{r} \cos[(\omega t - kr) + \varphi]$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \hat{\phi} \frac{E_0(\theta, \phi)}{r} \cos[(\omega t - kr) + \varphi]$$

$$c = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$= \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Anche in questo caso si hanno onde TEM  $\Rightarrow$  %

## Proprietà delle onde TEM

- $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  giacciono su una superficie equifase  $\perp$  al vettore di propagazione  $\vec{k}$
- Le superfici equifase si spostano a velocità  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- Nel vuoto la velocità è  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- Il vettore di Poynting  $\vec{S}$  è diretto come  $\vec{k}$
- La *densità di potenza* vale:  $S = \frac{|\vec{E}||\vec{H}|}{2} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} = \eta \frac{|\vec{H}|^2}{2}$
- $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  ed  $\vec{S} = S\hat{k}$  sono una terna destrorsa di vettori perpendicolari

# Interferenza

Fenomeno caratteristico della propagazione ondosa che si manifesta con rinforzi o indebolimenti quando due o più onde sono presenti contemporaneamente nello stesso punto.

Due onde equiverse



$$a_1(t, z) = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$$

$$a_2(t, z) = A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} a(t, z) &= a_1(t, z) + a_2(t, z) \\ &= A \cos(\omega t - kz + \varphi) \end{aligned}$$

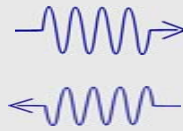
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \varphi &= \varphi_1 + \arctan\left(\frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\right) \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \rightarrow \quad A = A_1 + A_2 \quad \leftrightarrow \quad \text{Interferenza costruttiva}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi \quad \rightarrow \quad A = |A_1 - A_2| \quad \leftrightarrow \quad \text{Interferenza distruttiva}$$

## ... Interferenza

Due onde NON equiverse

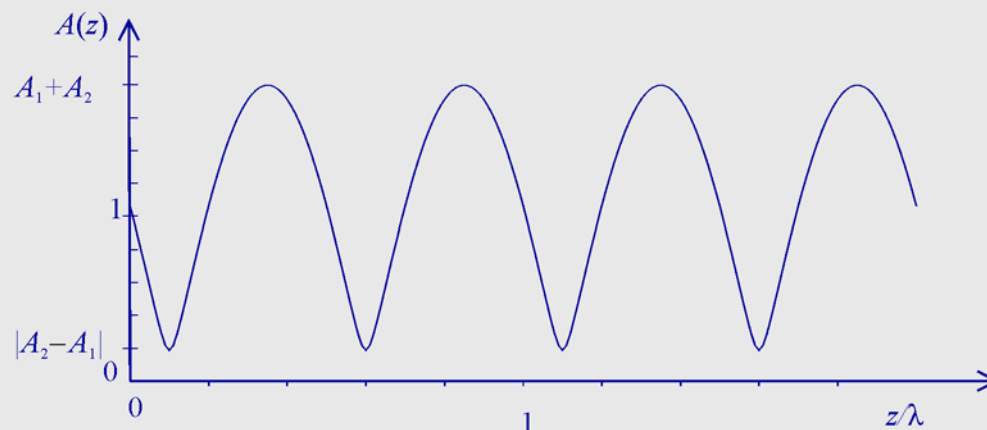


$$A_1 e^{j\varphi_1} e^{-jkz} \rightarrow a_1(t, z) = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$$

$$A_2 e^{j\varphi_2} e^{+jkz} \rightarrow a_2(t, z) = A_2 \cos(\omega t + kz + \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} a(t, z) &= a_1(t, z) + a_2(t, z) \\ &= A(z) \cos(\omega t - kz + \varphi(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(z) &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[2kz + (\varphi_2 - \varphi_1)]} \\ \varphi(z) &= \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \arctan \left[ \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \tan \left( kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$



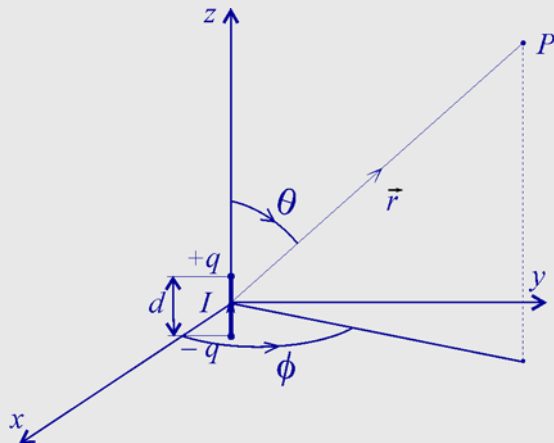
- $A$  varia con  $z$ , oscillando fra la somma e la differenza di  $A_1$  e  $A_2$

- $\text{R.O.S.} = \frac{A_1 + A_2}{|A_1 - A_2|}$

↑  
Rapporto di Onda Stazionaria



## Irraggiamento EM del dipolo



$$\vec{A} = \hat{z} \left( \frac{\mu I d}{4\pi} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}$$



$$E_r = \mu\omega \frac{Id}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r} \left( \frac{1}{kr} + \frac{1}{jk^2 r^2} \right) e^{-jkr}$$

$$E_\theta = \mu\omega \frac{Id}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \left( j + \frac{1}{kr} + \frac{1}{jk^2 r^2} \right) e^{-jkr}$$

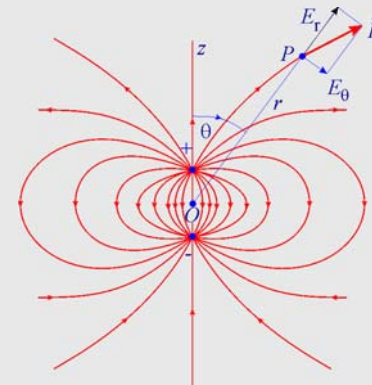
$$H_\phi = jk \frac{Id}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr}$$

- I campi hanno simmetria cilindrica intorno all'asse del dipolo (non dipendono da  $\phi$ )
- L'espressione assume espressioni più semplici a seconda se siamo vicini ( $r \ll \lambda$ ) o lontani ( $r \gg \lambda$ ) dal dipolo

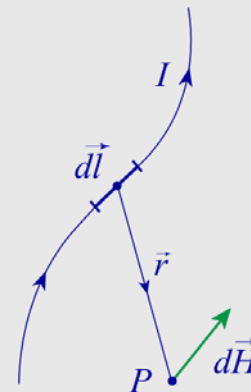
## Campo di prossimità del dipolo, $r < \lambda / 10$ (Near fields)

Stesso andamento dei campi quasi-statici

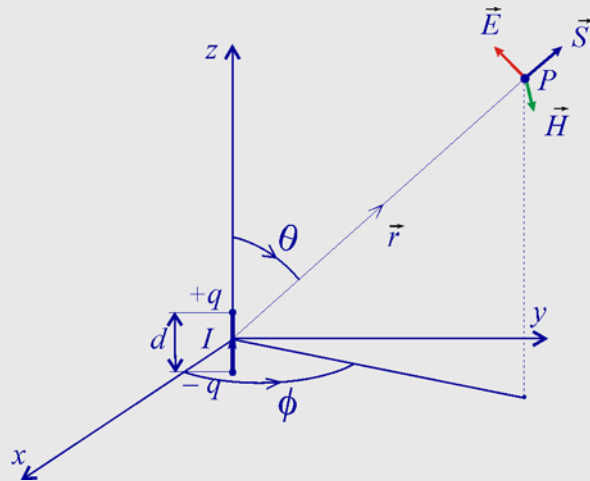
$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{2\cos\theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3} \hat{\theta} \right]$$



$$\vec{H} = \frac{Id}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$



## Campo lontano del dipolo, $r > \lambda$ (far field)



Rimangono solo i termini in  $1/r$

$$\vec{E} = j \frac{Id}{2\lambda} \eta \frac{\sin \theta}{r} e^{-jkr} \hat{\theta}$$

$$\vec{H} = j \frac{Id}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{-jkr} \hat{\phi}$$

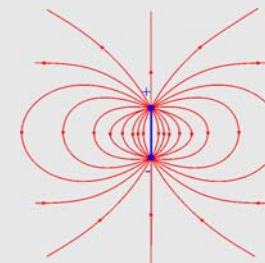
- Le superfici equifase sono sfere (*onde sferiche*). I campi sono massimi per  $\theta = 90^\circ$  e nulli per  $\theta = 0$ .
- I vettori  $\underline{E}$ ,  $\underline{H}$  sono fra loro ortogonali ed ortogonali ad  $\underline{r}$  (onda TEM).
- L'impedenza d'onda  $\eta = E/H$  vale  $\cong 377 \Omega$
- La densità di potenza vale:  $S = \frac{1}{2} |\vec{E} \times \vec{H}^*| = \eta \frac{|I|^2 d^2}{8\lambda^2} \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}$  e va come  $\frac{1}{r^2}$

## Dipolo elementare: *vettore di Poynting*

Usando i campi del dipolo nella forma completa (tutti i termini in  $1/r$ ), si ha:

$$\frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{n} d\Sigma = \eta |I|^2 \frac{\pi}{3} \frac{d^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{j}{(kr)^3} \right)$$

- La *parte reale* è indipendente dalla distanza  $r$  ed esprime la densità di potenza irradiata
- La *parte immaginaria* è relativa alla *potenza reattiva*; il segno meno indica che essa è di *tipo elettrico*; si tratta di energia palleggiata fra il generatore e il condensatore costituito dalla struttura metallica del dipolo.



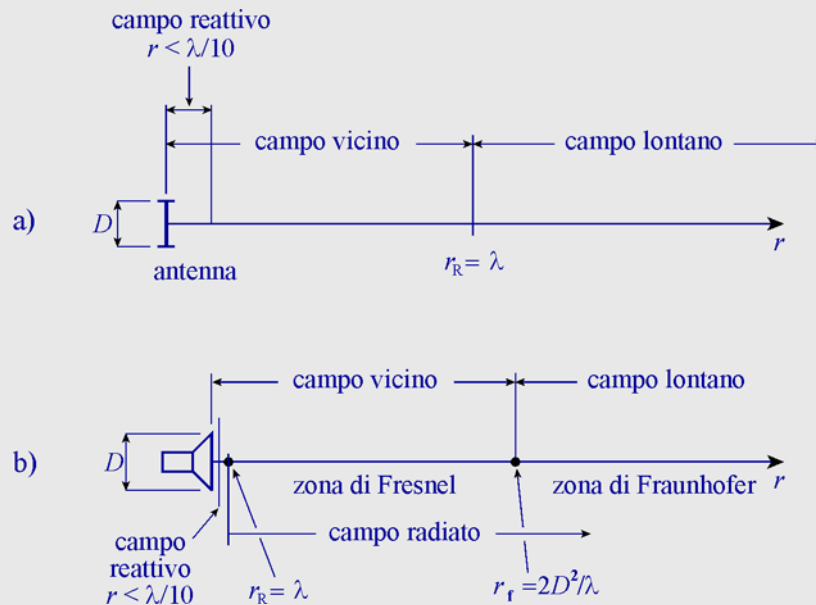
## Campo radiato da antenne

- Il campo EM prodotto da un'antenna è il risultato della somma (e il conseguente fenomeno dell'*interferenza*) dei campi irradiati dai *dipoli elementari*, costituiti dagli elementi di corrente che scorrono sull'antenna;
- Il campo lontano è quello che comunemente ha maggiore interesse nella utilizzazione delle antenne
- La grandezza più significativa per caratterizzare un'antenna è la funzione *guadagno*, la quale esprime il rapporto fra la densità di potenza  $S(r, \theta, \phi)$  prodotta dall'antenna ad una certa distanza  $r$  e quella prodotta alla stessa distanza da un'*antenna isotropa*

$$G(\theta, \phi) = \frac{S(r, \theta, \phi)}{\frac{P_t}{4\pi r^2}}$$

← Potenza di *antenna isotropa*

## Zone di campo: campo vicino e campo lontano



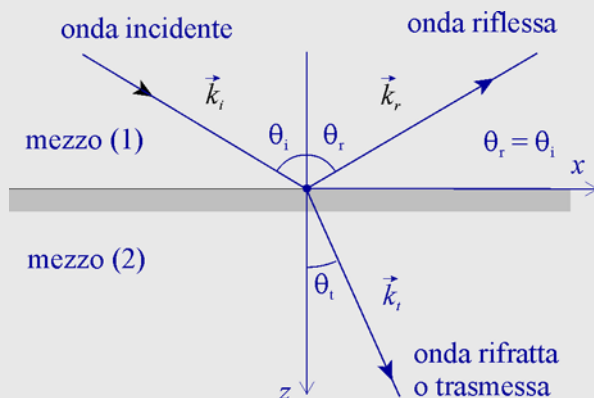
- Per  $r < \lambda / 10$  prevalgono i campi di natura *reattiva* (hanno la forma dei campi *quasi statici*)
- Per  $r > \lambda$  i campi hanno sostanzialmente proprietà *radiative*
- Alle distanze intermedie la natura dei campi è via via sempre più di natura radiativa

Il confine fra zona di *campo vicino* e *campo lontano* è dato dalla **maggiore** delle quantità:

$$\lambda \quad \text{e} \quad 2D^2/\lambda$$

## Riflessione e rifrazione

Due mezzi omogenei separati da una superficie piana



$$\theta_r = \theta_i$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{k_i}{k_t} = \frac{n_1}{n_2}$$

Leggi di  
Snell

## Formule di Fresnel

$$\text{Onde TE} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\text{TE}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \\ T_{\text{TE}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \end{array} \right.$$

$$\text{Onde TM} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\text{TM}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \\ T_{\text{TM}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \end{array} \right.$$