

LE ONDE ELETTROMAGNETICHE

ASPETTI FISICO – MATEMATICI¹

Marco Bini, IFAC-CNR, Firenze (Italy)

1 Le equazioni del campo elettromagnetico

Il campo elettromagnetico (EM) è una forma di energia che trae origine dalle cariche elettriche e dalle correnti elettriche (cariche elettriche in movimento) e che si manifesta con azioni dinamiche (*forze*) sulle cariche e sulle correnti. Per caratterizzare il campo EM si utilizzano i vettori *campo elettrico* \vec{E} e *campo magnetico* \vec{H} ². A questi vettori, che sono sufficienti a definire il campo EM nello spazio vuoto, se ne affiancano solitamente altri due e cioè \vec{D} , vettore *spostamento elettrico*, e \vec{B} vettore *induzione magnetica*, che permettono una trattazione più agevole quando si è in presenza di mezzi materiali.

1.1 Equazioni del campo in forma differenziale

In sostanza, il comportamento del campo EM è determinato da un sistema di equazioni differenziali fra i vettori \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} e \vec{B} che, in un generico mezzo materiale, si può scrivere nella forma seguente³:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4)$$

¹ **Nota bibliografica.** La trattazione contenuta in queste brevi note è necessariamente sommaria e non esaustiva. L'elettromagnetismo è un ramo della scienza vecchio di oltre un secolo e tuttora fecondo per le numerosissime applicazioni di grande rilevanza come: telecomunicazioni, radio e TV, telefonia cellulare, apparecchiature bio-medicali, strumentazione per la diagnostica, trattamenti industriali, radiolocalizzazione ecc. La disponibilità di testi, alcuni dei quali fatti anche molto bene, è enorme e la preferenza di uno rispetto ad un altro è determinata anche dagli interessi specifici del lettore. Limitando la scelta ai libri disponibili in lingua italiana, un testo di notevole pregio sia per i contenuti di base (ottimo repertorio matematico) sia perché vi si sono trattati numerosi aspetti specialistici (irraggiamento e ricezione, propagazione nei mezzi materiali, mezzi anisotropi, teoria della diffrazione, propagazione guidata, fibre ottiche, cavità risonanti, ecc.), è rappresentato da:

G.Toraldo di Francia, P.Bruscaglioni, *Onde elettromagnetiche*, seconda edizione, Zanichelli, Bologna.

Il libro contiene anche un elenco di numerosi testi ai quali il lettore può ricorrere per approfondire i vari aspetti dell'elettromagnetismo ai quali può essere interessato.

² La *legge di Lorentz* $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H} / \mu_0)$, che esprime la forza esercitata su una carica q che si muove a velocità \vec{v} , è usata comunemente per definire i campi \vec{E} e \vec{H} (v. § 1.2, per il significato di μ_0)

³ Le grandezze del campo dipendono sia dalle coordinate spaziali che dal tempo. Ad esempio, per il vettore \vec{E} si dovrebbe scrivere $\vec{E}(P, t)$ e analogamente per gli altri vettori e scalari. A meno che non sia necessario per evitare ambiguità di interpretazione, la scrittura di P e t verrà tralasciata.

Gli operatori " $\vec{\nabla} \times$ " e " $\vec{\nabla} \cdot$ " indicano rispettivamente l'operazione di "rotore" e quella di "divergenza". Per la definizione e l'uso dell'operatore differenziale $\vec{\nabla}$ (detto *nabla*) si veda la sezione A1.2.10 in Appendice.

Ricordiamo che il *campo elettrico* \vec{E} si misura in volt per metro [V/m]; lo *spostamento elettrico* \vec{D} in coulomb per metro al quadrato [C/m²]; il *campo magnetico* \vec{H} in ampère per metro [A/m]; l'*induzione magnetica* \vec{B} in tesla [T].

Oltre ai vettori del campo, nel sistema di equazioni (1)-(4), appaiono altre due grandezze e, cioè, la densità di corrente \vec{J} e la densità di carica elettrica ρ . La *densità di corrente* è un vettore il cui flusso attraverso ad una determinata superficie dà per definizione la corrente che scorre attraverso questa superficie. J si misura in ampère su metro quadrato [A/m²] mentre la densità di carica ρ rappresenta la carica elettrica per unità di volume e si misura, pertanto, in coulomb per metro cubo [C/m³].

La densità di corrente \vec{J} e la densità di carica ρ sono legate dalla seguente equazione, detta *equazione di continuità*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5)$$

la quale esprime, sostanzialmente la conservazione della carica elettrica⁴

Si noti che le equazioni (2) e (4) sono derivabili dalle (1) e (3) e non costituiscono due equazioni indipendenti. Infatti, applicando alla (1) la proprietà che la divergenza di un rotore è sempre nulla, si ottiene immediatamente la (2); analogamente, applicando la medesima proprietà alla (3) e utilizzando l'equazione di continuità (5) si ottiene l'equazione (4).

In generale ρ e \vec{J} sono funzioni dei vettori del campo, e questo a seguito del fatto che le cariche elettriche e le correnti, se non vincolate, possono muoversi e modificare la loro distribuzione sotto l'azione delle forze esercitate dal campo. In molti problemi pratici, però, l'intensità e la distribuzione spaziale e temporale di ρ e \vec{J} possono considerarsi imposte dall'esterno⁵ (cariche e correnti *imprese*⁶). In questo caso, le cariche e/o le correnti costituiscono le *sorgenti* da cui si origina il campo. Da un punto di vista matematico, può anche dirsi che la (1) e la (3), insieme alle equazioni costitutive (6) e (7), costituiscono un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} e \vec{B} , del quale ρ e \vec{J} rappresentano il *termine noto* (o *termine forzante*). Tale sistema risulta perfettamente determinato una volta che siano note le condizioni da imporre ai campi sul *contorno* del volume in cui si cerca la soluzione e siano noti i valori dei campi all'istante iniziale.

⁴ Per convincersene, si racchiuda con una superficie chiusa S un certo volume di spazio V e si integrino ambedue i membri della equazione (5) su V ; si applichi, quindi, al termine di sinistra dell'uguale il teorema della divergenza (vedi §A1.2.7 in Appendice) e si porti fuori dal segno di integrale, a destra dell'uguale, l'operazione di derivata; dall'equazione che ne risulta, si vede che la corrente uscente dalla superficie uguaglia la derivata della carica contenuta in V (cambiata di segno). In altre parole, la corrente produce un trasferimento continuo di carica da dentro a fuori V e la quantità di carica nel suo insieme (fuori e dentro V) non cambia.

⁵ Esistono tuttavia casi (di notevole interesse pratico) dove vanno distinti, nella densità di corrente, almeno due contributi: uno proporzionale al campo elettrico (vedi la (8) in fondo al § 1.2 - Equazioni costitutive) e un altro impresso (cioè, indipendente dal campo)

⁶ Ad esempio, questo accade quando la corrente che scorre su un filo da cui si originano i campi è completamente determinata dal *generatore* che alimenta il filo, oppure una quantità fissa di carica è confinata in uno spazio puntiforme.

Notiamo infine che il termine $\partial \vec{D}/\partial t$ (introdotto da Maxwell) è noto con il nome di *corrente di spostamento* ed è la sua presenza che, come vedremo, rende conto della esistenza di fenomeni ondosi nel campo elettromagnetico.

1.2 Equazioni costitutive

Come abbiamo detto, solo due dei quattro vettori \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} e \vec{B} possono essere considerati indipendenti e, più precisamente, \vec{D} e \vec{B} dipendono da \vec{E} , \vec{H} , in quelle che vengono comunemente chiamate le *relazioni costitutive* (o *equazioni costitutive*). A parte casi molto particolari (mezzi ferromagnetici, plasmi ecc.) in tutti i casi di nostro interesse \vec{B} è proporzionale ad \vec{H} e \vec{D} è proporzionale ad \vec{E} , così che le *relazioni costitutive* assumono questa forma:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (7)$$

Inoltre, nei mezzi conduttori, la densità di corrente è proporzionale al campo elettrico:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Legge di Ohm}) \quad (8)$$

In queste equazioni i simboli rappresentano le seguenti grandezze (fra parentesi, le relative unità di misura):

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, costante dielettrica del vuoto (Farad/metro)

ϵ_r , costante dielettrica relativa o *permittività*; nello spazio vuoto è $\epsilon_r = 1$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, permeabilità magnetica del vuoto (henry/metro);

μ_r , permeabilità magnetica relativa; nello spazio vuoto è $\mu_r = 1$

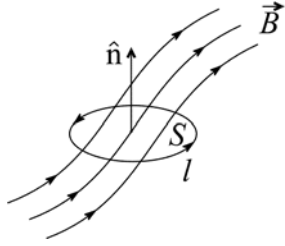
σ = conducibilità elettrica (siemens/metro); ad es., per il rame, $\sigma_{\text{Cu}} = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$

Invece della conducibilità, è anche di uso comune la *resistività elettrica* ρ_e , inverso della conducibilità ($\rho_e = 1/\sigma$), che si misura in ohm-metro (Ωm).

1.3 Equazione del campo in forma integrale

Si abbia un campo elettromagnetico, definito dai vettori \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} e \vec{B} in una certa regione di spazio R , nella quale è presente la densità di corrente \vec{J} e la densità di carica ρ .

Occupiamoci prima delle equazioni con il rotore. Si consideri in R una linea chiusa l alla quale si appoggia una superficie S , non necessariamente piana. Applicando il teorema della circuitazione (vedi §A1.2.9 o Eq.ne (A 40)) alle equazioni del rotore (1) e (3), si ottiene:



$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \Phi_s(\vec{B}) \quad (9)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS = I + \Phi_s \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (10)$$

Figura 1

La prima di queste dice che la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa (che è in sostanza la forza elettromotrice quando la linea l coincide con il percorso di un circuito elettrico) è uguale alla derivata temporale del flusso dell'induzione magnetica concatenato con tale linea. La seconda afferma che la circuitazione del campo magnetico uguaglia la *corrente totale* che attraversa la superficie S , nella quale si è soliti distinguere la corrente di conduzione vera e propria (I) e quella di spostamento rappresentata dal flusso di $\partial \vec{D} / \partial t$.

Per quanto riguarda le equazioni (2) e (4), si consideri una superficie S chiusa. Dal teorema della divergenza (A 39) applicato alla (4) si ottiene:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \int_V \rho dV = \quad (11)$$

È questo un importante risultato, noto come *legge di Gauss*, che ha questo significato: il flusso del vettore induzione elettrica \vec{D} attraverso una superficie chiusa che racchiude un volume V è uguale alla carica elettrica contenuta nel volume V .

La forma integrale corrispondente alla (2) è più banale. Non esistendo la carica magnetica, il flusso di \vec{B} che esce da una superficie chiusa è nullo. In sostanza, il numero di linee di campo in un *tubo di flusso* è costante. Ovvero, \vec{B} è un campo solenoidale.

1.4 Relazioni alle interfacce

In un singolo mezzo i campi sono continui. Tuttavia, alle interfacce fra due mezzi materiali di caratteristiche diverse, si possono avere cambi bruschi (cioè, *discontinuità*) nelle componenti normali e/o tangenziali dei vettori del campo.

Sia S una superficie che separa due mezzi materiali, che indichiamo come mezzo $(-)$ e mezzo $(+)$. Sulla superficie siano presenti la densità di corrente superficiale \vec{J}_S e la densità di carica superficiale ρ_S . Nel punto di interesse siano definiti: la normale \hat{n} , che punta verso il mezzo $(+)$; il versore $\hat{\tau}$, tangente alla linea di intersezione del piano del disegno con la superficie S ; il versore $\hat{k} = \hat{n} \times \hat{\tau}$ che esce dal foglio ed ha la direzione di \vec{J}_S (v. Figura 2).

Applicando l'equazione (10), che lega la circuitazione del campo magnetico su l al flusso della corrente attraverso S' , e tenendo presente che i lati di l che attraversano S sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a quelli paralleli ad S , si ottiene l'equazione (12). Cioè, la differenza fra H_t^+ ,

componente tangenziale del campo magnetico nel mezzo (+), ed H_t^- , componente tangenziale del campo magnetico nel mezzo (-), è uguale alla densità di corrente superficiale \vec{J}_S . Se ora si considera l'equazione (9) e si tiene presente che non esiste una corrente magnetica, l'applicazione della circuitazione di \vec{E} porta alla (13). Cioè, le componenti tangenziali di \vec{E} sono continue attraverso S .

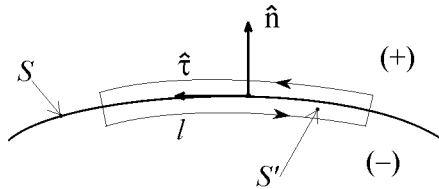


Figura 2

$$\hat{n} \times (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) = \vec{J}_S \quad (12)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = 0 \quad (13)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = \rho_S \quad (14)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (15)$$

Per le componenti normali si utilizza il teorema della divergenza (A 40) applicato ad una piccola scatola cilindrica che ha le basi (di superficie S_b) nel mezzo (+) e (-). La scatola ha superfici laterali trascurabili rispetto a quella delle basi, così che il flusso che la attraversa coincide con quello attraverso le basi. Se per la divergenza usiamo nella (A 40) l'espressione (2) si ottiene che il flusso $\hat{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) S_b$ deve essere uguale alla carica $\rho_S S_b$ contenuta nel volume della scatola e quindi la (14). Cioè, la componente normale dello spostamento elettrico ha una discontinuità attraverso S uguale alla densità di carica superficiale ρ_S . Un ragionamento analogo può essere fatto per la divergenza di \vec{B} (4), e poiché non esiste carica magnetica, la componente normale di \vec{B} è continua attraverso S (15).

2 Rappresentazione nel dominio delle frequenze

La soluzione delle equazioni di Maxwell nella loro generalità rappresenta un compito di notevole difficoltà, anche nella forma semplificata di un mezzo materiale (o il vuoto) descritto da equazioni costitutive lineari, quali sono le (6) - (8), che permettono di eliminare \vec{D} e \vec{B} per semplice sostituzione. Rimangono comunque da risolvere due Eq.ni differenziali nelle due incognite vettoriali \vec{E} ed \vec{H} – e quindi sei componenti scalari – che dipendono sia dalle coordinate spaziali che dal tempo.

Una prima semplificazione si può ottenere ricorrendo, per la dipendenza temporale, alla rappresentazione armonica mediante grandezze complesse. Come è noto (si veda la sezione A4 - Analisi di Fourier, in Appendice), una qualsiasi grandezza fisica può essere rappresentata come sovrapposizione di funzioni la cui dipendenza dal tempo può essere messa nella forma dell'esponenziale $e^{j\omega t}$. In particolare, un vettore come, ad esempio, quello del campo elettrico si può scrivere $\vec{E}e^{j\omega t}$, dove il vettore complesso \vec{E} (vedi § A3.1.4) può essere scritto nella forma $\vec{E} = \vec{E}_r + j\vec{E}_i$, con \vec{E}_r ed \vec{E}_i vettori reali (vedi (A 81)). Espressioni come questa si possono utilizzare per ciascuno dei vettori che appaiono nelle equazioni precedenti e lo stesso può dirsi per scalari come la densità di carica elettrica che può essere scritta $\rho e^{j\omega t}$, dove ρ è il fasore $|\rho|e^{j\varphi_\rho}$ (§ A3.1.1-Fasori).

A questo punto si può applicare il metodo simbolico alle equazioni differenziali ed integrali del campo elettromagnetico. Tanto per capire come si procede si prenda, ad esempio, la Eq.ne (1). Per quanto riguarda il membro a destra dell'uguale si ha, $\vec{\nabla} \times (\vec{E}e^{j\omega t}) = e^{j\omega t} \vec{\nabla} \times \vec{E}$, dato che l'operatore $\vec{\nabla}$

agisce soltanto sulla dipendenza spaziale di \vec{E} , mentre per la parte a sinistra dell'uguale si ha, $\partial(\vec{B}e^{j\omega t})/\partial t = e^{j\omega t}j\omega\vec{B}$ (il vettore-fasore \vec{B} non dipende da t). Pertanto l'equazione diviene: $e^{j\omega t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = -e^{j\omega t}j\omega\vec{B}$. L'esponenziale $e^{j\omega t}$ (che è sempre $\neq 0$) si può eliminare da ambedue i membri e si ottiene infine, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$.

Quindi, la ricetta per passare ad equazioni indipendenti dal tempo è semplice⁷:

1. I vettori e gli scalari del campo divengono vettori e scalari complessi, funzioni delle coordinate spaziali, ma non del tempo;
2. In ciascuna equazione si sostituisce l'operatore di derivazione rispetto al tempo con il fattore $j\omega$, mentre gli operatori che operano sulle coordinate spaziali rimangano tali e quali;
3. Risolte le equazioni, si ottiene una soluzione "fasoriale", dalla quale si ricava la soluzione istantanea finale moltiplicando quella fasoriale per $e^{j\omega t}$ e prendendo la parte reale.

Siamo ora in condizioni di scrivere le Eq.ni del campo in termini delle quantità complesse. Prima però scomponiamo il termine a destra dell'uguale nella (3), che normalmente prende il nome di (densità di) *corrente totale* \vec{J}_t in tre contributi: (1) *corrente di spostamento* ($\partial\vec{D}/\partial t = j\omega\vec{D}$), (2) *corrente di conduzione* $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$, (3) *corrente impressa* \vec{J}_{imp} ; ovvero, tenendo presente la relazione costitutiva (7):

$$\vec{J}_t = [\sigma(\omega) + j\omega\epsilon_0\epsilon_r(\omega)]\vec{E} + \vec{J}_{imp} = j\omega\epsilon_0\tilde{\epsilon}_r(\omega)\vec{E} + \vec{J}_{imp} \quad (16)$$

dove si sono riassunte nella quantità $\tilde{\epsilon}_r(\omega)$ tutte le proprietà dielettriche e di conduzione del materiale⁸. Ricordiamo che quando si vuol mettere in evidenza il contributo dei dipoli del materiale ad ϵ_r , questa viene scritta $\epsilon_r = 1 + \chi$, dove χ , che è detta *suscettibilità elettrica*. La suscettibilità è di solito un numero complesso ($\chi = \chi_1 - j\chi_2$) dove la quantità positiva (parte immaginaria di χ) è introdotta per tener conto delle perdite di potenza causate dai fenomeni dissipativi del moto dei dipoli. Di conseguenza, anche la costante dielettrica $\epsilon_r = \epsilon_{r1} - j\epsilon_{r2}$ è un numero complesso la cui parte reale è uguale a $1 + \chi_1$ e la parte immaginaria è uguale χ_2 . In definitiva $\tilde{\epsilon}_r$ in (16) si può scrivere:

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_{r1} - j(\epsilon_{r2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}) \quad (17)$$

Si noti che questa espressione permette di descrivere mezzi materiali anche notevolmente complessi. Nel seguito non avremo bisogno di tutta questa generalità e supporremo di avere a che fare con un mezzo *non dispersivo* (ϵ e μ indipendenti dalla frequenza) ed *omogeneo*. Addirittura in molte delle proprietà dei campi elettromagnetici che ci interessa di discutere potremo supporre che il mezzo sia semplicemente il **vuoto** per il quale si ha $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$.

⁷ Si tratta di una applicazione del metodo simbolico (§ A3.1.2, in Appendice) alle Eq.ni di Maxwell.

⁸ Si noti che da qui avanti si tralascerà di scrivere in maniera esplicita la dipendenza da ω di $\tilde{\epsilon}_r$, ϵ_r e σ , a meno che non sia necessario per chiarezza espositiva.

Si riscrivono qui di seguito le Eq.ni fondamentali del campo EM (1) – (4) in termini di vettori e scalari complessi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (18) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (19)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}_{\text{imp}} \quad (20) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{imp}} \quad (21)$$

3 Potenziali elettromagnetici

La soluzione dei problemi di elettromagnetismo risulta spesso facilitata dall'introduzione di grandezze ausiliarie detti *potenziali*.

Poiché è $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (vedi la (2)) e poiché la divergenza di un rotore è sempre nulla, come mostra la (A 38), si può ipotizzare che l'induzione magnetica \vec{B} sia il rotore di un vettore \vec{A} , detto *potenziale vettore*:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (22)$$

Se si introduce questa espressione nella Eq.ne di Maxwell (1), si ha immediatamente $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t) = 0$. La quantità fra parentesi può dunque essere espressa come gradiente di un campo scalare V , cioè si può porre $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t = -\vec{\nabla}V$, da cui si ottiene:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (23)$$

Facciamo ora l'ipotesi che il mezzo sia omogeneo in modo che si possa scrivere⁹ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, con ε indipendente dal posto. Se si introduce questa espressione di \vec{D} nell'altra equazione di Maxwell, cioè nella (3), si ha: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\varepsilon\mu(\vec{\nabla} \partial V / \partial t + \partial^2 \vec{A} / \partial t^2) + \mu\vec{J}_{\text{imp}}$. Dove \vec{J}_{imp} è la densità di corrente impressa. Il doppio rotore può essere scomposto come in (A 35) così che, introducendo questa espressione nella precedente e riordinando si ha: $\varepsilon\mu \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 - \nabla^2 \vec{A} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \partial V / \partial t) + \mu\vec{J}_{\text{imp}}$. Con la (22) abbiamo specificato $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, possiamo ancora scegliere la divergenza di \vec{A} , ponendo (*Lorentz gauge*):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (24)$$

con il che la precedente equazione per il potenziale vettore diviene:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_{\text{imp}} \quad (25)$$

dove si è posto $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, che vedremo essere la *velocità* con cui un'onda elettromagnetica si propaga nel mezzo in questione. Se il mezzo è il vuoto v coincide con $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cong 3 \cdot 10^8$ m/s,

⁹ Per semplificare la notazione si scriverà normalmente ε per indicare $\varepsilon_0\varepsilon_r$ e μ invece di $\mu_0\mu_r$

velocità della luce nel vuoto. Se ora si scrive \vec{D} utilizzando l'espressione di \vec{E} data dalla (23) e lo si inserisce nella Eq. (4), tenendo presente il Lorentz gauge (24) e riordinando si ha:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho_{\text{imp}} \quad (26)$$

Queste due ultime equazioni hanno un aspetto molto simile. Si tratta dell'operatore d'Alambertiano $\left[\nabla^2 - (1/v^2) \partial^2 / \partial t^2 \right]$ applicato a V oppure ad ognuna delle componenti di \vec{A} .

Se si conosce la distribuzione delle cariche impresse $\rho_{\text{imp}}(P, t)$ e delle correnti impresse $\vec{J}_{\text{imp}}(P, t)$ in una regione finita di spazio τ^{10} , che si estende senza ostacoli né altre sorgenti fino all'infinito¹¹, la soluzione delle precedenti equazioni si scrive:

$$\vec{A}(Q, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}_{\text{imp}}(P, t - \frac{r}{v})}{r} d\tau \quad (27)$$

$$V(Q, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_{\text{imp}}(P, t - \frac{r}{v})}{r} d\tau \quad (28)$$

dove $r = |P - Q|$ è la distanza fra il punto corrente d'integrazione P e il punto Q in cui si calcolano i potenziali. Si vede che la corrente \vec{J} è la sorgente del potenziale vettore \vec{A} e la carica ρ è la sorgente del potenziale scalare V . Inoltre, nell'integrale le sorgenti nel punto P vanno prese con il valore che avevano al tempo $t - r/v$. Per questa ragione le soluzioni (27) e (28) dell'equazione di d'Alambert sono note con il nome di *potenziali ritardati*.

3.1 Potenziali per campi armonici

Nel caso in cui la dipendenza dal tempo sia del tipo armonico, i potenziali si scrivono:

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \rho_{\text{imp}}(P) \frac{e^{-jkr}}{r} d\tau \quad (29)$$

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \vec{J}_{\text{imp}}(P) \frac{e^{-jkr}}{r} d\tau \quad (30)$$

dove $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ è detto *numero d'onda*, legato, come vedremo, alla lunghezza d'onda λ dalla relazione $k = 2\pi/\lambda$.

Da questi si calcolano i campi con le definizioni (22) e (23), che divengono:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (31)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - j\omega\vec{A} \quad (32)$$

¹⁰ Si noti che per indicare il volume useremo il simbolo τ invece di V quando c'è il rischio di confondere il volume con il potenziale V .

¹¹ Questo significa che in τ non ci sono altri corpi materiali oltre alle cariche e correnti impresse e che all'esterno di τ non c'è nulla fino all'infinito. In altre parole la soluzione è relativa alle sole sorgenti presenti nell'integrando delle (29) e (30).

4 Approssimazione quasi-statica (q.s.)

Quando i campi non variano nel tempo o variano lentamente¹², le equazioni possono essere semplificate e, di conseguenza, risultano semplificate le soluzioni e la loro comprensione. La semplificazione consiste nell'eliminare le derivate rispetto al tempo nelle (1) – (3) o, quel che è lo stesso, fare tendere a zero la frequenza nelle (18) e (20)¹³. Pertanto, le equazioni del campo e dei potenziali si scrivono:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (33) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{imp}} \quad (34) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_{\text{imp}}}{r} d\tau \quad (35)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_i \quad (36) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (37) \quad \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}_{\text{imp}}}{r} d\tau \quad (38)$$

Si vede subito che le equazioni del campo elettrico \vec{E} e quella del campo magnetico \vec{H} risultano fra loro disaccoppiate e possono essere risolte una indipendentemente dall'altra. Inoltre si vede chiaramente che il campo elettrico ha per sorgenti le cariche elettriche, mentre il campo magnetico si origina dalle correnti elettriche¹⁴.

4.1 Campo elettrico

Il campo elettrico è irrotazionale e può essere derivato dal solo potenziale V di cui è il gradiente cambiato di segno (si veda la (23), con la derivata temporale nulla). Poiché il gradiente di $1/r$ vale¹⁵ $-\hat{r}/r^2$, si ottiene per il campo elettrico:

$$\vec{E}(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_{\text{imp}}(P)}{r^2} \hat{r} d\tau \quad (39)$$

dove \hat{r} è il versore di \vec{r} , che punta da P verso Q .

¹² Lentamente qui significa che il periodo T in cui variano (in genere, oscillano armonicamente) sorgenti e campi è molto lungo rispetto al tempo che le perturbazioni del campo (che, come vedremo, si propagano alla velocità della luce) impiegano a percorrere la regione di spazio di interesse.

¹³ Nella trattazione dei fenomeni lentamente variabili è comune trascurare la corrente di spostamento $\partial\vec{D}/\partial t$ rispetto alla corrente di conduzione (come abbiamo fatto qui) mantenendo però il termine $\partial\vec{B}/\partial t$, che è responsabile, fra l'altro, della maggior parte dei fenomeni di cui si occupa l'elettrotecnica, quali dinamo, alternatori, motori elettrici, trasformatori, ecc. Se si mantiene il termine $\partial\vec{B}/\partial t$, il campo elettrico non è più irrotazionale e, oltre al termine che deriva dal potenziale scalare, contiene il termine $-\partial\vec{A}/\partial t$ che viene dalla variazione del campo magnetico. Per gli scopi di questa trattazione, tuttavia, i fenomeni legati al campo magnetico lentamente variabile non sono di interesse e appesantirebbero notevolmente il testo. Per questa ragione ci limiteremo a quella parte di campo elettrico che ha per origine le cariche elettriche ed è rappresentato da $-\vec{\nabla}V$.

¹⁴ In realtà le correnti sono un flusso di cariche elettriche e, quindi, a rigori, anche il campo magnetico trae origine dalle cariche elettriche. Però, solo se le cariche elettriche sono in movimento producono anche un campo magnetico.

¹⁵ Si noti che il vettore \vec{r} va dal punto P in cui è la carica ρdV al punto Q in cui si vuole calcolare il campo. Il gradiente va calcolato rispetto alle coordinate di Q e di qui viene il segno meno. Inoltre, poiché ρ_i dipende da P ma non da Q , l'operatore gradiente può essere portato sotto il segno di integrale.

4.1.1 Carica puntiforme

Si abbia la *carica puntiforme*¹⁶ q in un certo punto P . La formula precedente (39) permette di calcolare il campo elettrico in un qualsiasi punto a distanza r :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (40)$$

La formula mostra che il verso del campo dipende dal segno di q : se la carica q è positiva le linee del campo escono da essa, mentre se q è negativa vi convergono.

4.1.2 Dipolo elettrico

L'insieme di due cariche puntiformi di uguale intensità e segno opposto $+q$ e $-q$ separate da un segmento \vec{d} , orientato dalla carica negativa a quella positiva, costituisce un *dipolo elettrico*. Si chiama *momento di dipolo* il vettore $\vec{p} = q\vec{d}$. In genere la distanza d è infinitesima e la carica q è sufficientemente grande in modo che per d tendente a zero il prodotto qd , e quindi il momento di dipolo p , rimanga finito. Il campo totale del dipolo si ottiene sommando (vettorialmente) i campi delle singole cariche ed il risultato ha l'espressione (41). Il campo ha simmetria di rotazione intorno all'asse del dipolo e grazie a questa simmetria è sufficiente analizzare l'andamento del campo su un piano che contiene tale asse.

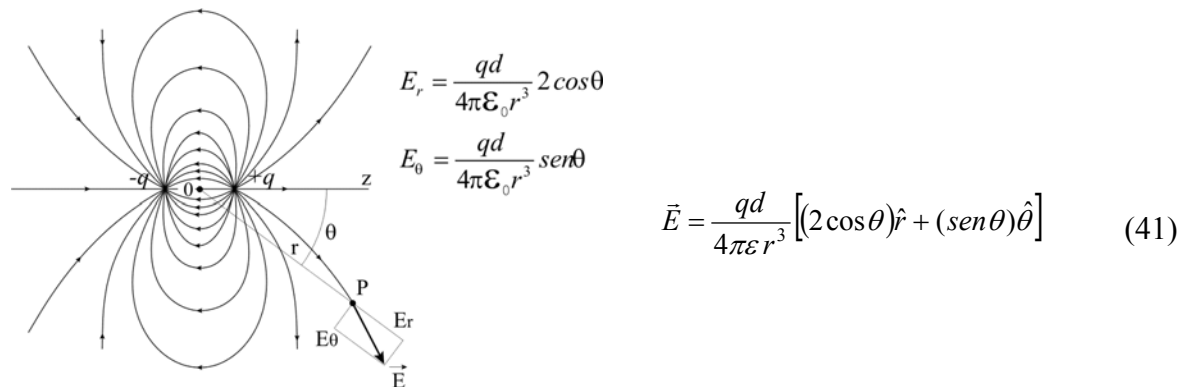


Figura 3 - Campo di un dipolo elettrico

4.2 Campo magnetico

Il campo magnetico ha origine dalle correnti elettriche, come si vede chiaramente dalla (38). Quando le correnti sono quelle che scorrono in un circuito elettrico, allora l'integrale nella (38) assume la forma di un integrale lungo la linea l che costituisce il percorso del circuito. Svolgendo la derivazione che per la definizione (22) lega il campo magnetico al potenziale vettore, si hanno queste espressioni, a seconda che la corrente sia descritta dalla sua densità oppure dal valore I lungo il filo l :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} d\tau \quad (42)$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (43)$$

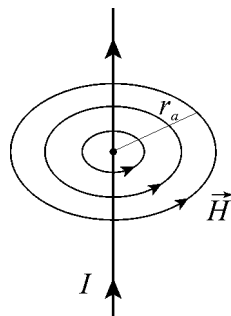
¹⁶ Per esprimere la carica puntiforme si può usare la delta di Dirac $\delta(P-P_1)$, che ha la proprietà di essere zero dovunque escluso P_1 , dove va all'infinito, e il cui integrale vale 1 se esteso ad un volume che racchiude P_1 . Ad es., la densità di carica $\rho(P)$ relativa alla carica q in P_1 si scrive $\rho(P) = \delta(P-P_1)q$.

Dal teorema della circuitazione si può ricavare una relazione nota come *legge di Ampère*, che torna spesso utile per il calcolo del campo \vec{H} :

$$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \sum_m I_m \quad (44)$$

Essa mostra che la circuitazione del campo magnetico su di una linea l è uguale alla somma delle correnti racchiuse da l .

La formula di Ampère può essere utilizzata per calcolare il campo generato da una corrente I che scorre su un filo rettilineo di lunghezza infinita (Figura 5). Il campo magnetico si avvolge in linee



$$H = \frac{I}{2\pi r_a} \hat{\phi} \quad (45)$$

Figura 4 - Campo magnetico generato da una corrente rettilinea indefinita alla distanza assiale r_a .

chiuse (è solenoidale, essendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$) attorno alla corrente e queste linee per ragioni di simmetria sono cerchi. Dalla (44) si ottiene immediatamente $2\pi r H = I$ e quindi la (45), che è nota come *legge di Biot-Savart*.

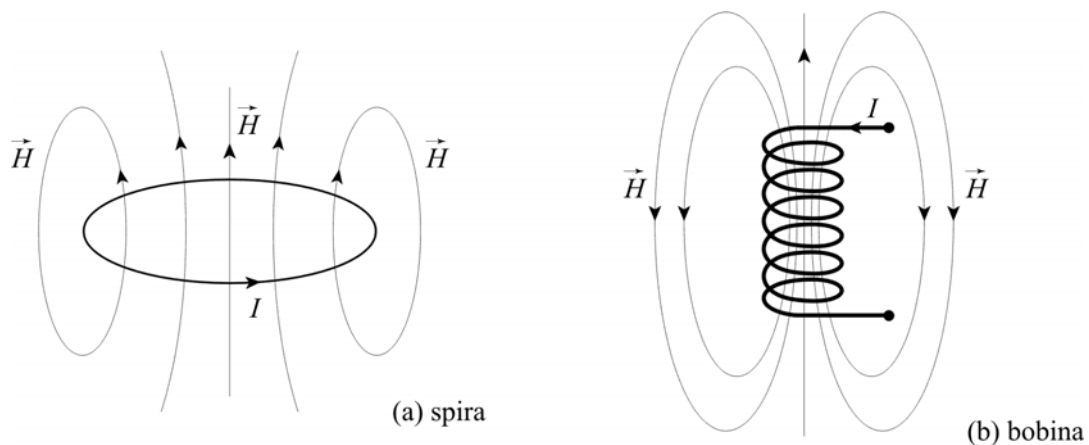


Figura 5 - Campo magnetico prodotto da una spira circolare (a) e da una bobina a forma di solenoide (b)

Riportiamo in Figura 5 l'andamento del campo magnetico generato da alcune configurazioni tipiche di correnti molto usate nella tecnica: la bobina circolare (a) e il solenoide cilindrico (b) rappresentate qui in maniera molto schematica. Si vede che la caratteristica fondamentale del campo magnetico è quella di avvolgersi in linee chiuse attorno alla corrente che lo produce.

Concludiamo questa Sezione sui campi quasi statici con l'esempio di una macchina impiegata nell'industria del legno. Essa utilizza il campo elettrico oscillante a frequenze della decina di MHz

(onde corte) per asciugare in tempi estremamente rapidi la colla utilizzata per unire varie parti di manufatti in legno (Figura 6). Il materiale da trattare viene posto fra le piastre dell'*applicatore* che da un punto di vista elettrico, è un condensatore a facce piane e parallele. Il condensatore è alimentato da un generatore a radio frequenza (RF) che può erogare potenze anche di varie decine di kW.

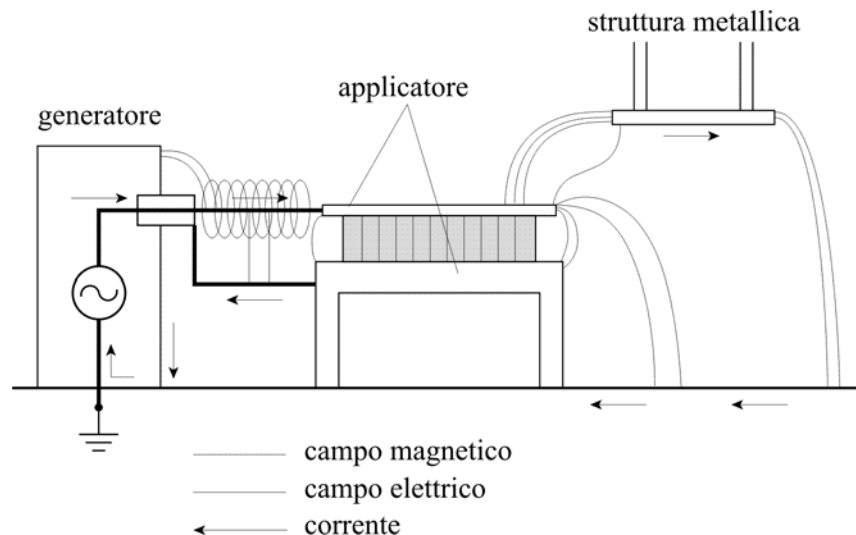


Figura 6 - Rappresentazione schematica dei campi e delle correnti in prossimità di una macchina per il riscaldamento dielettrico utilizzata nel trattamento di manufatti in legno

Come si vede dalla rappresentazione schematica delle linee di forza, il campo magnetico è in pratica concentrato intorno ai cavi che dal generatore portano la corrente RF all'applicatore, mentre le linee del campo elettrico partono dall'elettrodo "caldo" (quello a cui arrivano le correnti del generatore) e si richiudono verso l'altro elettrodo oppure verso la "massa" comune alla quale è connesso il generatore per ragioni di sicurezza. La maggior parte delle linee del campo elettrico sono, ovviamente, concentrate all'interno dell'applicatore, però alcune linee escono anche all'esterno (campi di bordo "fringing fields") e possono anche accoppiarsi a strutture metalliche presenti in prossimità prima di richiudersi alla fine a massa.

I campi elettrici hanno la stessa configurazione spaziale e intensità dei campi statici prodotti da distribuzioni di cariche e di potenziale elettrico statici, di pari valore: partono dalle cariche positive e si richiudono su quelle negative. Poiché però le cariche variano in intensità e invertono il proprio segno con la frequenza del generatore, così le linee di campo variano di intensità e invertono il proprio verso con la stessa frequenza. Analogamente il campo magnetico ha la distribuzione e intensità di quello prodotto da correnti continue di pari intensità e percorso.

Come vedremo nelle prossime Sez.i 4.3 e 5.1, ai campi elettrici e magnetici è associata una densità di energia localizzata nello spazio proporzionale al quadrato di E e di H . Nel caso di macchine con applicatore capacitivo, come questa di cui parliamo, l'energia è in massima parte immagazzinata nel campo elettrico del condensatore ed è massima quando E è massimo. Dopo un quarto di periodo,

quando il campo si annulla anche l'energia nel campo è nulla, e poiché l'irraggiamento è trascurabile¹⁷, essa deve essere stata riassorbita dal generatore. Poi torna massima quando, dopo mezzo periodo, il campo con verso invertito raggiunge un nuovo massimo. C'è pertanto uno scambio di energia reattiva fra generatore e campi di prossimità a frequenza doppia (i massimi si ripetono dopo *mezzo periodo*) rispetto a quella del generatore.

4.3 Energia del campo elettrico e magnetico

La presenza del campo elettrico e di quello magnetico in una certa zona di spazio comporta che ad essi sia associata una certa quantità di energia. Questo in sostanza è conseguenza del fatto che la creazione del campo ha richiesto la spesa di una corrispondente quantità di energia da parte del generatore. Senza darne la dimostrazione analitica (chi lo desidera può vedere il citato testo di Toraldo⁽¹⁾) riportiamo qui di seguito le espressioni della quantità di energia immagazzinata nel campo elettrico e nel campo magnetico.

4.3.1 Energia immagazzinata nel campo

In ogni volumetto di spazio dV , nel quale sia presente un campo elettrico \vec{E} e di induzione magnetica $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, è contenuta la quantità di energia¹⁸:

$$dW_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \quad (46)$$

Si noti che il principio di sovrapposizione, che vale invece per i vettori del campo, non vale per l'energia¹⁹. Infatti la sovrapposizione dei campi (\vec{E}_1, \vec{D}_1) ed (\vec{E}_2, \vec{D}_2) equivale al campo $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{D}_1 + \vec{D}_2)$, mentre per la densità di energia si ha:

$$\frac{1}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{D}_1 + \vec{D}_2) = \frac{1}{2} (\vec{E}_1 \cdot \vec{D}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{D}_2 + \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{D}_1) \neq \frac{1}{2} \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_1 + \frac{1}{2} \vec{E}_2 \cdot \vec{D}_2 \quad (47)$$

Analogamente per il campo magnetico \vec{H} e induzione magnetica $\vec{B} = \mu \vec{H}$ l'energia immagazzinata nel volumetto dV vale:

$$dW_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \mu H^2 dV \quad (48)$$

Nel caso di *campi alternati con dipendenza armonica* del tipo $e^{j\omega t}$, le relazioni possono essere espresse mediante i fasori dei vettori del campo elettrico e magnetico estendendo ai vettori complessi

¹⁷ Le dimensioni della macchina e le distanze alle quali i campi hanno intensità significativa sono $\ll \lambda$, per cui la potenza irradiata è molto minore di quella reattiva § 6.1.1 e § 6.2

¹⁸ Nella derivazione delle formule che seguono si suppone, come nella maggior parte di questi appunti, che il mezzo sia non dispersivo, ovvero che ϵ e μ non dipendano dalla velocità con cui variano i campi.

¹⁹ Da un punto di vista matematico, si dice che il principio di sovrapposizione è applicabile se le operazioni che si eseguono sono *lineari*. Ora è facile rendersi conto che mentre le Eq.ni di Maxwell sono lineari per i vettori del campo, il prodotto che appare nella espressione dell'energia non è invece un'operazione lineare. Ci sarebbe da notare che fa eccezione a questa regola il prodotto fra funzioni *ortogonali*, (sono tali, ad es., le armoniche di frequenza diversa nello sviluppo di Fourier), ma l'argomento è troppo specialistico per questa sede.

quanto detto nella §A3.1.3. Di conseguenza il *valor medio* dell'energia elettrica e magnetica immagazzinata in un volumetto dV diviene²⁰:

$$d\overline{W}_e = \frac{1}{4} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV \quad d\overline{W}_m = \frac{1}{4} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* dv \quad (49)$$

Se poi per esprimere le ampiezze dei fasori si usano i *valori efficaci*, che, come detto in §A3.1.3 sono definiti uguale ai valori massimi diviso $\sqrt{2}$, allora, al posto del fattore 1/4 si ha il fattore 1/2 e le Eq.ni (49) diventano formalmente identiche alle (46) e (48).

4.3.2 Potenza fornita dalle sorgenti e dissipata nel campo

Per definizione, la potenza dP scambiata nel volumetto dV fra il campo e la densità di corrente impressa e di conduzione (non c'è invece la corrente di spostamento) è data dalla relazione $dP = \vec{E} \cdot (\vec{J}_{imp} + \vec{J}_c) dV$, ovvero, introducendo $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ per la corrente di conduzione (σ è la conducibilità del mezzo), si ottiene:

$$dP = (\vec{E} \cdot \vec{J}_{imp} + \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}) dV = -dP_g + dP_d \quad (50)$$

Cioè, la potenza scambiata dal campo è data da quella $dP_g = -\vec{E} \cdot \vec{J}_{imp} dV$ immessa dal generatore e $dP_d = \sigma \vec{E} \cdot \vec{E} dV$ dissipata nel mezzo.

Anche in questo, se si ha a che fare con *campi alternati con dipendenza armonica* del tipo $e^{j\omega t}$, le suddette relazioni possono essere espresse mediante i vettori complessi come detto nella §A3.1.3. Di conseguenza il valor medio della potenza scambiata con il campo elettrico diviene:

$$-dP_g + dP_d = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}_{imp}^* dV + \frac{1}{2} \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV \quad (51)$$

Ed ovviamente, il fattore 1/2 sparisce se i vettori complessi sono espressi in valore efficace.

5 Proprietà del campo elettromagnetico (senza l'approssimazione q.s.)

In questa sezione torniamo alle equazioni del campo EM complete, comprendenti anche la corrente di spostamento, trascurata nell'approssimazione quasi statica. Per semplicità, assumiamo che il mezzo sia omogeneo, cioè che la costante dielettrica ε , la permeabilità magnetica μ e la conducibilità elettrica σ (quando c'è) non varino con il posto. Inoltre, salvo avvertimento contrario, supporremo di avere a che fare con dipendenza dal tempo del tipo $e^{j\omega t}$ (le grandezze del campo sono quantità complesse) e supporremo anche che ε e μ non varino con la frequenza (mezzo non dispersivo).

5.1 Energia e potenza nel campo EM

Supponiamo che nel mezzo, oltre alla corrente di spostamento $j\omega\varepsilon\vec{E}$ e di conduzione $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$, siano presenti sorgenti di corrente impressa \vec{J}_{imp} . Applicando l'identità vettoriale (A 34) al prodotto dei campi $\vec{E} \times \vec{H}^*$ si ottiene $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}^*)$. Se utilizziamo le equazioni di

²⁰ Il segno di sovrallineatura, che nella formula seguente sta ad indicare il valor medio (rispetto al tempo), verrà nel seguito omissso, a meno che non si crei confusione con i valori istantanei.

Maxwell (18) e (20) per eliminare i rotori e riordiniamo i termini, si ottiene: $\sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* + j\omega(\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^*) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*)$. Consideriamo ora un certo volume V , racchiuso da una superficie S con la normale \hat{n} diretta verso l'esterno, ed integriamo ambedue i membri della precedente Eq.ne sul volume V . Applicando il teorema della divergenza al termine che contiene $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*)$ e dividendo tutto per 2, si ha infine:

$$-\frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{imp}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV + 2j\omega \int_V \frac{\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{4} dV + \frac{1}{2} \oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{n} dS \quad (52)$$

La quantità $\vec{E} \times \vec{H}^*$ è un vettore complesso che viene comunemente indicato con il simbolo \vec{S} e al quale si dà il nome di *vettore di Poynting* :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (53)$$

La (52) può essere riscritta associando ai vari termini un'etichetta che ne riassume il significato:

$$\underbrace{-\frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{imp}}^* dV}_{P_{\text{in}} + jQ_{\text{in}}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV}_{P_d} + 2j\omega \underbrace{\int_V \frac{\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{4} dV}_{\vec{W}_m - \vec{W}_e} + \underbrace{\frac{1}{2} \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dS}_{P_u + jQ_u} \quad (54)$$

Questa importante relazione, nota anche come *teorema del vettore di Poynting complesso*, esprime un bilancio energetico per il volume V . L'uguaglianza delle parti reali si interpreta dicendo che la potenza media P_{in} , immessa nel volume V dalle sorgenti, viene in parte dissipata (P_d) all'interno del volume e in parte (pari a P_u , parte reale del flusso di \vec{S}) trasportata all'esterno dal vettore di Poynting che assume perciò il significato di *densità di flusso di potenza* em. Per quanto riguarda le parti immaginarie, la (54) ha questa interpretazione: la *potenza reattiva* che le sorgenti (Q_{in}) e il mondo esterno ($-Q_u$) scambiano con V è pari alla differenza fra l'energia media immagazzinata nel campo magnetico meno quella immagazzinata nel campo elettrico. Un esempio può aiutare a capire i concetti esposti. Si immagini che le sorgenti siano costituite da un generatore collegato ad una antenna e che la superficie S racchiuda l'antenna e il generatore in un volume V . Il bilancio della parte reale dice che la potenza media P_{in} fornita dal generatore è per la parte P_d (si spera piccola) dissipata negli elementi resistivi dell'antenna, mentre P_u (parte reale del flusso del vettore di Poynting) viene irradiata all'esterno di S . Per analizzare il significato delle parti immaginarie, si supponga che la superficie S sia molto lontana, con il che si può dimostrare che Q_u , parte immaginaria del flusso del vettore di Poynting, è praticamente nulla (si veda, ad es., il caso particolare del campo radiato dal dipolo, §6.1.2). Il bilancio delle parti immaginarie dice allora che l'energia reattiva che il generatore scambia con l'antenna è legata ai *campi di prossimità* non propagativi che si richiudono sulle strutture dell'antenna. Un caso particolare si ha quando l'energia media immagazzinata nel campo magnetico è uguale a quella immagazzinata nel campo elettrico e la potenza reattiva erogata dal generatore è nulla. In questo caso, il carico visto dal generatore è puramente resistivo e si è in quella che, in gergo tecnico, è detta una condizione di *risonanza*. In questa situazione, l'energia reattiva immagazzinata nei

campi di prossimità può essere anche molto elevata, ma essa passa alternativamente dal campo elettrico a quello magnetico, senza interessare il generatore.

5.2 Propagazione del campo elettromagnetico: onde elettromagnetiche

Richiameremo qui alcune proprietà fondamentali del fenomeno ondoso e delle onde elettromagnetiche in particolare. Per ragioni di spazio limiteremo la presentazione a due tipi di onde estremamente significativi: le onde piane e le onde sferiche.

5.2.1 Onde piane in un dielettrico

Si abbia un mezzo omogeneo, indefinito e privo di sorgenti ($\vec{J} = 0$, $\rho = 0$), il che comporta $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ oltre che $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$. Se ora calcoliamo il rotore di ambedue i termini della (1), usiamo la proprietà (A 35) del $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times$, ricordiamo che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}/\epsilon) = 0$, si ottiene $-\nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\mu \partial \vec{H} / \partial t)$ e, se sostituiamo $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ dalla (3), si ottiene infine $\nabla^2 \vec{E} = \epsilon \mu \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$. Se eseguiamo una analoga procedura partendo dalla (3) si ottiene un'identica equazione per \vec{H} e le due equazioni possono essere dunque scritte:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (55) \quad \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (56) \quad \text{con} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (57)$$

Non è questa la sede per studiare, in tutta la sua generalità, la soluzione di questa, che è nota come *l'equazione delle onde*. Se ci limitiamo ad una oscillazione di tipo armonico (dipendenza dal tempo $e^{j\omega t}$), la derivata seconda rispetto al tempo diviene $-\omega^2$ e le (55) e (56) si scrivono:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (58) \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (59)$$

dove si è posto:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (60)$$

Una equazione della forma delle (58) e (59) è detta *equazione di Helmholtz* vettoriale. Cerchiamo una soluzione costituita da un vettore complesso che ha una dipendenza dalle coordinate spaziali della forma $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$; cioè, per esempio, \vec{E} si scrive:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (61)$$

dove:

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ è il vettore che individua il punto di coordinate x, y, z ;

\vec{k} è un vettore tale che il suo modulo $\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ è uguale al valore dato dalla (60);

\vec{E}_0 è un vettore (in genere complesso) indipendente rispetto a x, y, z .

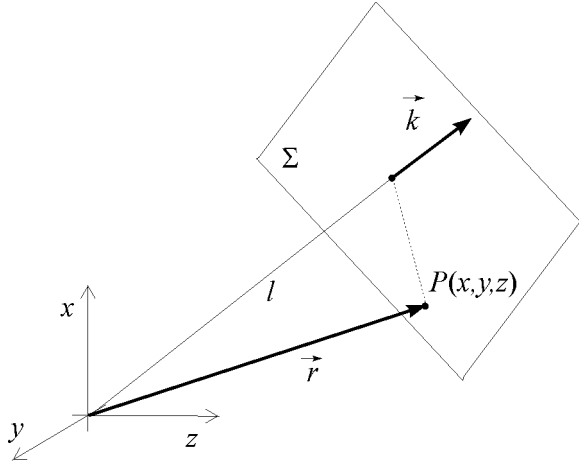


Figura 7 - Piano Σ , definito dalla relazione $\vec{k} \cdot \vec{r} = kl$, con l proiezione di \vec{r} su \vec{k}

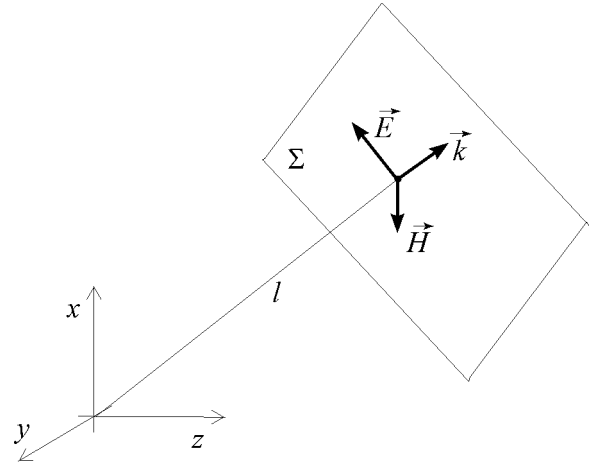


Figura 8 - Vettori \vec{E} e \vec{H} di un'onda piana definita dal vettore d'onda \vec{k}

È chiaro che, con k definito come in (60), la (61) è una soluzione della (58). Basta eseguire le derivate seconde rispetto a x , y e z , contenute in ∇^2 , per verificarlo. Analogamente, $\vec{H}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ è soluzione della (59).

Per capire la forma di questa soluzione, si noti che lo scalare, $\vec{k} \cdot \vec{r} = kl$ individua la superficie di un piano Σ , luogo dei punti $P(x, y, z)$ per cui si ha appunto $k_x x + k_y y + k_z z = kl$ costante. Cioè, Σ è un piano perpendicolare a \vec{k} , che dista dall'origine della quantità l , proiezione di \vec{r} su \vec{k} (Figura 7).

Notiamo ora che, per funzioni la cui dipendenza da x, y, z ha la forma $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$, con passaggi non difficili, si ha: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}$. Analogamente si ottiene il rotore, così che per campi del tipo (61) si può scrivere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} \quad (62)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\vec{k} \times \vec{E} \quad (63)$$

Poiché il mezzo è privo di cariche e di correnti è $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, ovvero, per la (62), $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, cioè \vec{E} è perpendicolare a \vec{k} . Analogo discorso vale per \vec{H} . La sua divergenza è nulla (19) e quindi anche \vec{H} è perpendicolare a \vec{k} .

Inoltre, se confrontiamo la (63) con la (18) e poniamo per comodità di scrittura $\vec{k} = k\hat{k}$, dove \hat{k} è il versore di \vec{k} (quindi normale al piano Σ), si può scrivere $-j\omega\mu\vec{H} = -jk\hat{k} \times \vec{E}$, e quindi:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E} \quad (64)$$

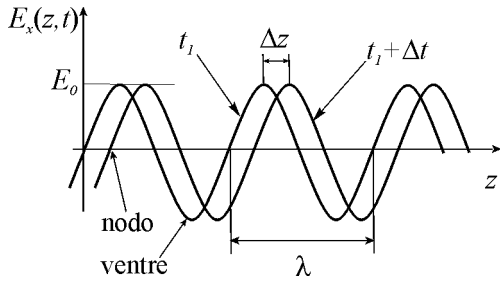
dove si è definito la quantità $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, nota come *impedenza d'onda*, con unità di misura l'ohm (Ω). Nel caso del vuoto $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cong 377\Omega$. La relazione (64) ora trovata mostra che \vec{H} oltre che a \vec{k} è perpendicolare anche ad \vec{E} e pertanto \vec{E} , \vec{H} e \vec{k} costituiscono una terna destrorsa, come è schematizzato in Figura 8. Inoltre, poiché η è una quantità reale, la fase del vettore \vec{H} è in ogni punto uguale a quella di \vec{E} .

Se dal fasore (61) scriviamo la grandezza istantanea si ottiene:

$$\text{Re}(\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\omega t}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kl) . \quad (65)$$

Per facilitarne l'analisi e senza perdere in generalità, possiamo immaginare che il vettore d'onda sia diretto come l'asse z (versore di $\vec{k} = \hat{z}$), così che il piano Σ è parallelo al piano (x,y) ed l coincide con la coordinata z . Sempre per facilitare la comprensione, supponiamo che il vettore campo elettrico \vec{E}_0 sia diretto come x : di conseguenza \vec{H}_0 è diretto come y . I valori istantanei dei vettori hanno pertanto le espressioni mostrate dalla (66) e (67).

Consideriamo, ad esempio la (66). Si tratta in sostanza di una funzione armonica della variabile spaziale z e del tempo t , la quale è identica a sé stessa dopo una distanza $\lambda = 2\pi/k$ lungo z e dopo un periodo di tempo $T = 2\pi/\omega$. Inoltre, ovviamente, il valore della funzione non cambia se non cambia il suo argomento, cioè se t e z crescono in modo tale che $\omega t - kz = \omega(t+\Delta t) - k(z+\Delta z)$, ovvero se $\Delta z/\Delta t = \omega/k$. In altre parole, la configurazione di *ventri* e *nodi*, che le (66) e (67) rappresentano, avanza



$$\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (66)$$

$$\vec{H} = \hat{y} H_0 \cos(\omega t - kz) \quad (67)$$

$$\left| \frac{E}{H} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta, \text{ impedenza d'onda} \quad (68)$$

Figura 9 - Andamento della componente secondo x del campo elettrico, di un'onda piana che si propaga secondo l'asse z , visualizzata in due istanti successivi t_1 e $t_1 + \Delta t$.

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \text{ velocità di fase} \quad (69)$$

nello spazio alla velocità $\omega/k = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ dettagliata nella (69).

La soluzione dell'equazione delle onde ora descritta è detta *onda piana*, per ovvie ragioni (fase ed ampiezza di \vec{E} ed \vec{H} sono costanti su ogni piano $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{costante}$). La superficie Σ , su cui giacciono i vettori \vec{E} ed \vec{H} , prende il nome di *fronte d'onda* ed il vettore \vec{k} , ad essi perpendicolare, è detto *vettore d'onda* mentre il suo modulo è detto *numero d'onda*, ed esprime il numero di lunghezze d'onda λ contenute in 2π radianti ($k = 2\pi/\lambda$).

Dalle espressioni del campo elettrico e magnetico si può calcolare il *vettore di Poynting*, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*/2$ che (come abbiamo visto in § 5.1) rappresenta la *potenza elettromagnetica* che fluisce ogni metro quadro di superficie (W/m^2). Se notiamo che \vec{H} è perpendicolare ad \vec{E} (e con esso in fase) ed ha modulo $|E|/\eta$, il vettore di Poynting, risulterà pertanto un vettore reale di modulo pari ad $|E||H|/2 = |E|^2/(2\eta) = \eta H^2/2$ e di direzione e verso uguali a quelli del vettore di propagazione \vec{k} .

Riassumiamo qui di seguito le proprietà dell'onda piana in un mezzo omogeneo.

- (a) La propagazione avviene in direzione perpendicolare ai vettori del campo \vec{E} ed \vec{H} , individuata dal *vettore d'onda* $\vec{k} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}\hat{k}$.

(b) La fase e l'ampiezza di \vec{E} si mantengono costanti su piani perpendicolari alla direzione di propagazione \hat{k} e questi piani si spostano con velocità pari a $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$; nel vuoto questa espressione si scrive $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ e vale $c = 2.997992 \times 10^8 \text{ m/s} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

(c) Il vettore di Poynting \vec{S} è un vettore reale (\vec{E} ed \vec{H} sono fra loro in fase) e la densità di potenza (W/m^2) trasportata dall'onda si scrive:

$$S = \frac{|\vec{E}||\vec{H}|}{2} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} = \eta \frac{|\vec{H}|^2}{2} \quad (70)$$

È evidente che la conoscenza di una qualsiasi delle tre quantità S , E o H , insieme al vettore d'onda \vec{k} , è sufficiente a caratterizzare completamente il campo EM.

(d) I vettori \vec{E} , \vec{H} ed $\vec{S} = S\hat{k}$ costituiscono una terna destrorsa di vettori fra loro perpendicolari.

L'onda piana è un caso particolare di onde dette TEM, che godono cioè della proprietà di avere \vec{E} ed \vec{H} fra loro perpendicolari e perpendicolari alla direzione di propagazione. Altre onde TEM sono, ad esempio, le onde che si propagano su linee bifilari, il modo fondamentale nei cavi coassiali e le onde sferiche.

5.2.2 Onde sferiche

Un altro tipo di onda di grande interesse, sia teorico che pratico, è l'onda sferica, che è una soluzione delle Eq.ni di Maxwell caratterizzata dal fatto che la fase è costante su superfici sferiche con un centro comune. Ciascuna delle componenti dei campi \vec{E} ed \vec{H} ha una dipendenza dalle coordinate spaziali e dal tempo che possiamo scrivere in questa forma:

$$a(\vec{r}, t) = \frac{A_m(\theta, \phi)}{r} \cos[(\omega t - kr) + \varphi] \quad (71)$$

dove la pulsazione ω e il numero d'onda k hanno lo stesso significato che per l'onda piana (si veda la (60)), r indica la distanza del generico punto P dal centro O delle superfici d'onda, nel quale può pensarsi localizzata la sorgente dell'onda²¹, mentre $A_m(\theta, \phi)$ esprime l'intensità dell'onda ed è una quantità che non dipende dal modulo di \vec{r} , anche se, in genere, dipende dalla sua direzione. Considerando le superfici (sferiche) in cui l'argomento $(\omega t - kr)$ nella (71) è costante, con un ragionamento simile a quello fatto per le onde piane, si nota che queste superfici si muovono a velocità $v = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$.

²¹ A rigori, questa espressione, che per $r = 0$ è addirittura indeterminata, non può essere e non viene utilizzata per rappresentare il campo EM a distanze dalla sorgente molto piccole. L'onda sferica è infatti la forma tipica della soluzione dell'equazione delle onde lontano dalla sorgente, mentre nelle sue prossimità è necessario ricorrere ad espressioni dei campi notevolmente più complicate. Su questo punto si tornerà più avanti, quando si parlerà di campo vicino e campo lontano

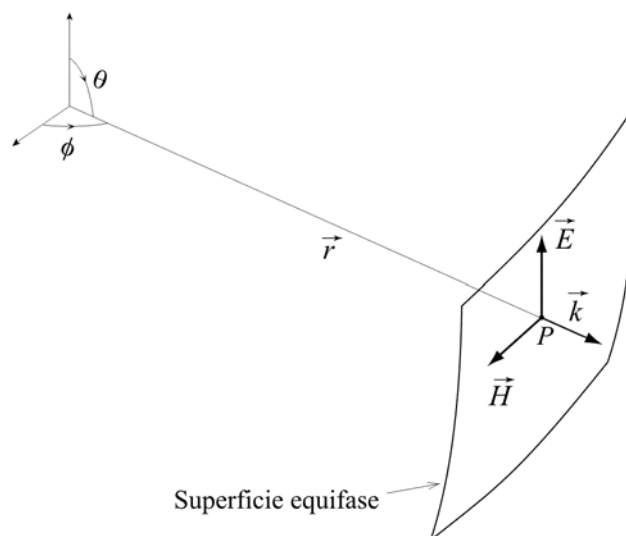


Figura 10- Onda sferica

Anche l'onda sferica è, come l'onda piana, un'onda TEM con i vettori \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} orientati in modo da costituire una terna destrorsa e legati fra loro e con il vettore di Poynting \vec{S} dalle relazioni (64), (68) e (70). L'onda si propaga nello spazio con una successione di picchi e di valli che si allontanano dalla sorgente a velocità $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. L'altezza dei picchi e la profondità delle valli però, a differenza di quello che accade per l'onda piana, non si mantiene costante, ma si riduce secondo il fattore $1/r$ al crescere di r , per tenere conto del fatto che l'energia dell'onda si distribuisce su superfici sempre più ampie.

5.3 Interferenza

L'*interferenza* è un risultato caratteristico dei fenomeni ondosi che si produce quando due o più onde sono contemporaneamente presenti nella stessa zona di spazio. Si tratta di un effetto che è di notevole rilevanza per la comprensione di numerosi fenomeni quali la risonanza o la concentrazione della potenza in fasci molto stretti, propria delle antenne direttive come, ad es., quelle impiegate nei radar o nei ponti radio.

Per evitare le complicazioni di una trattazione generale, consideriamo il caso di due onde piane, *monocromatiche* e *coerenti*²², di uguale frequenza, che si propagano in una stessa direzione (quella dell'asse z), distinguendo due sotto-casi: (a) le onde vanno nello stesso verso e (b) le onde procedono in versi opposti. Si tratta di due esempi che, pur riferendosi a situazioni relativamente semplici, permettono di cogliere le proprietà essenziali del meccanismo dell'interferenza e di discuterne i risultati più significativi.

²² Un'onda è detta *monocromatica* se è costituita da una oscillazione di una sola e ben precisa frequenza. Inoltre essa è detta *coerente* se la sua fase non varia nel tempo. Ad esempio, la relazione (66), con ω e ϕ indipendenti dal tempo, rappresenta un'onda piana, monocromatica e coerente, che si propaga in direzione dell'asse z .

5.3.1 Onde equiverse

Siano $a_1(z,t) = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ ed $a_2(z,t) = A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$ ²³ due onde piane monocromatiche di ugual frequenza $f = \omega/2\pi$, che si propagano nella direzione dell'asse z , ambedue dirette nel verso degli z positivi. Utilizzando il *principio di sovrapposizione*²⁴ e ben note formule di trigonometria (v. (A 52)), l'onda risultante $a(z,t) = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$ può essere scritta:

$$a(z,t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad (72)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \varphi &= \varphi_1 + \arctan\left(\frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\right) \end{aligned} \quad (73)$$

Il risultato è di facile interpretazione. Si tratta di un'onda che si muove nella direzione e nel verso dell'asse z (cioè, stessi direzione e verso delle onde componenti) la cui ampiezza e fase dipendono dalle ampiezze delle onde componenti e dal loro *sfasamento*²⁵ o differenza di fase ($\varphi_2 - \varphi_1$). Lo sfasamento gioca un ruolo particolarmente importante, perché, a seconda del suo valore, l'ampiezza della risultante, come si vede dalla prima delle (73), varia fra $(A_1 + A_2)$ e $|A_2 - A_1|$. Nel primo caso, che corrisponde ad uno sfasamento nullo (o multiplo pari di π), si dice che si ha a che fare con onde *in fase*, mentre nel secondo caso, corrispondente a sfasamento di π (o multipli dispari di π) si dice che le onde sono in *controfase*. Come si vede le onde in fase producono un rinforzo dell'intensità dell'onda (*interferenza costruttiva*), mentre quelle in controfase danno luogo ad un indebolimento (*interferenza distruttiva*). Nel caso in cui le due onde componenti abbiano ampiezze uguali, l'ampiezza dell'onda risultante è *doppia* rispetto a quella delle componenti se queste sono in fase, mentre risulta *nulla* se sono in controfase.

5.3.2 Onde non-equiverse

In questo caso le due onde sinusoidali e monocromatiche $a_1(z,t) = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ ed $a_2(z,t) = A_2 \cos(\omega t + kz + \varphi_2)$ procedono in *versi opposti*: la prima nel verso degli z positivi e la seconda in

²³ $a_1(z,t)$ e $a_2(z,t)$ stanno ad indicare una qualsiasi delle componenti cartesiane dei vettori \vec{E} ed \vec{H} .

²⁴ In termini semplici, il *principio di sovrapposizione* può essere espresso dicendo che la presenza simultanea di più onde, diciamo $a_1(z,t)$, $a_2(z,t)$... $a_n(z,t)$, in una certa zona di spazio, dà luogo ad un'onda risultante $a(z,t)$ esprimibile mediante la somma algebrica delle onde componenti:

$$a(z,t) = a_1(z,t) + a_2(z,t) + \dots + a_n(z,t)$$

Questo risultato, abbastanza plausibile e intuitivo, può essere derivato in maniera matematicamente rigorosa dalla *linearità* della equazione delle onde.

²⁵ Lo sfasamento può essere anche espresso in termini di *ritardo temporale* Δt fra le due onde ($\Delta t = (\varphi_2 - \varphi_1)/\omega$) o di *scorrimento spaziale* $\Delta z = (\varphi_2 - \varphi_1)/k$.

quello degli z negativi²⁶. Con operazioni un po' laboriose di trigonometria standard, si arriva a scrivere la seguente espressione dell'onda $a(z,t)$ che risulta dalla sovrapposizione di $a_1(z,t)$ e $a_2(z,t)$:

$$a(z,t) = a_1(z,t) + a_2(z,t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi(z)) \quad (74)$$

con

$$\begin{aligned} A(z) &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[2kz + (\varphi_2 - \varphi_1)]} \\ \varphi(z) &= \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \arctan\left(\frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \tan\left(kz + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (75)$$

Come si nota, a differenza di quanto accade nel caso delle onde equiverse, ora ampiezza e fase variano con z . In particolare, come mostrato dalla Figura 11, l'ampiezza $A(x)$ oscilla fra la somma e la

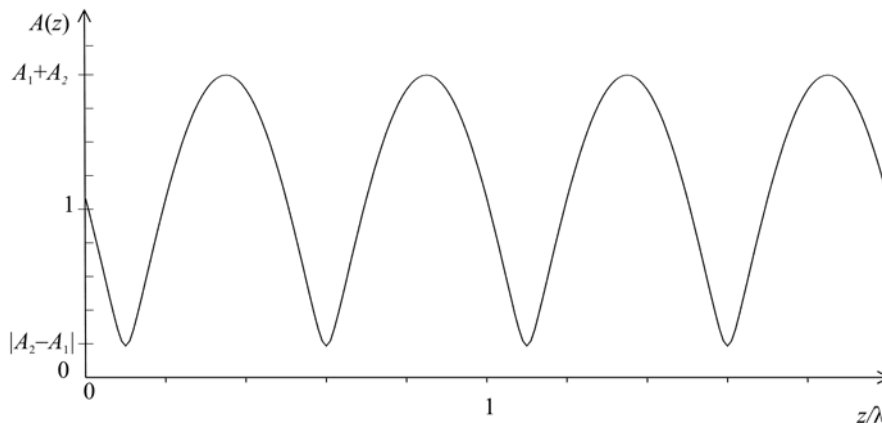


Figura 11 – Grafico di $A(z)$, interferenza di due onde che viaggiano in versi opposti ($A_1=0.8 A_2$).

differenza di A_2 e A_1 (ampiezze delle onde interferenti), con periodicità data da $\Delta z = 2\pi/2k = \lambda/2$.

Un caso di particolare interesse è quello in cui $a_1(z,t)$ e $a_2(z,t)$ hanno uguale ampiezza ($A_2 = A_1$). In questo caso, i massimi dell'ampiezza raggiungono valori pari al doppio dell'ampiezza di ciascuna delle onde componenti, mentre i minimi si riducono a zero. Per quanto riguarda la fase, la seconda delle (75) mostra che ora essa risulta indipendente da z . In questo caso, il fenomeno ha perso le sue caratteristiche di moto ondoso propagativo, per assumere quelle di un'oscillazione stazionaria. In ogni punto z , non c'è moto in direzione dell'asse, ma soltanto un'oscillazione su e giù dell'ampiezza nel tempo con pulsazione ω . Questo fenomeno, nella letteratura specialistica, prende il nome di *onda stazionaria*, termine forse non molto appropriato, perché l'onda in realtà non c'è.

Nel caso generale ($A_2 \neq A_1$), l'onda risultante contiene sia aspetti propagativi che di stazionarietà. Per indicare il peso relativo di queste due componenti, si utilizza un parametro, detto *rapporto di onda stazionaria (R.O.S.)*, definito come il “rapporto fra il valore massimo e il valore minimo dell'ampiezza $A(z)$ lungo z ”²⁷.

²⁶ Un esempio di situazione pratica in cui si realizza la presenza contemporanea di due onde che si propagano in versi opposti è quello di un'onda (che possiamo identificare, ad esempio, con la $a_1(z,t)$), che, incontrando un ostacolo, dà luogo ad un'onda riflessa (la $a_2(z,t)$, appunto); questa, tornando indietro, si sovrappone all'onda incidente e produce i fenomeni di interferenza qui descritti.

²⁷ È facile rendersi conto che, utilizzando questa definizione, si può scrivere:

6 Irraggiamento dei campi elettromagnetici

Facciamo ora un cenno, necessariamente breve, alle modalità con cui vengono generati i campi EM. Anche se non possiamo approfondire, analizzeremo con qualche dettaglio l'emissione del *dipolo elementare* e coglieremo l'occasione per discutere le caratteristiche fondamentali dell'emissione elettromagnetica.

6.1 Dipolo elementare

Si abbia una corrente che scorre lungo un elemento di lunghezza d e forma un *elemento di corrente*²⁸ o *dipolo elettrico elementare* di momento Id . Supponiamo che il dipolo sia diretto come l'asse z e posizionato all'origine del sistema di coordinate. Introducendo l'elemento di corrente²⁹ nella espressione (27) si vede che il potenziale vettore ha solo la componente secondo z e assume l'espressione (76).

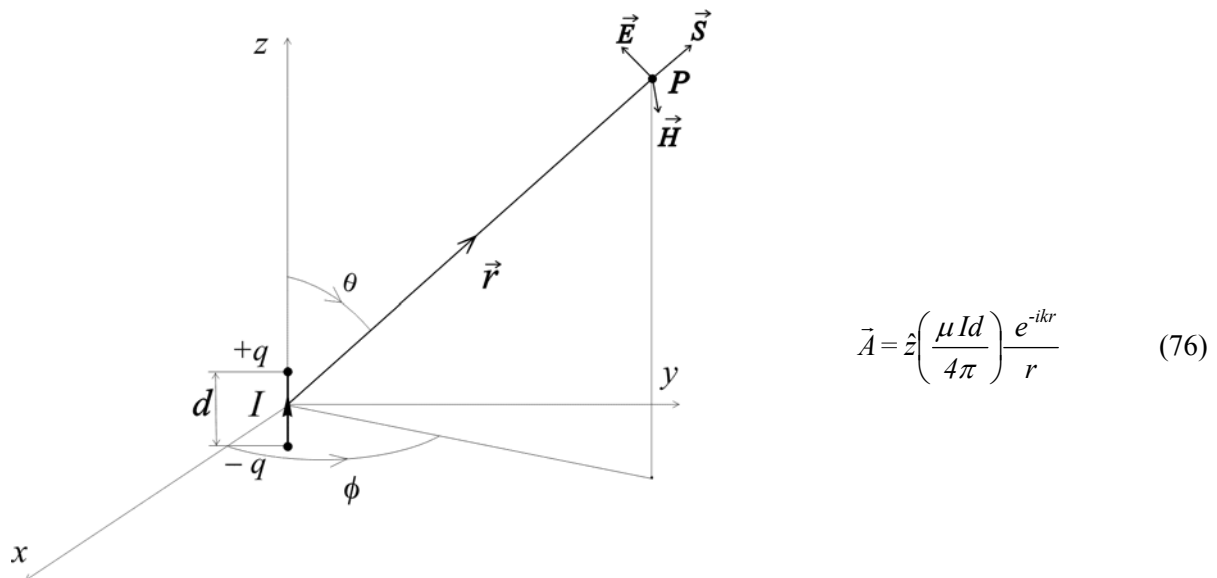


Figura 12- Emissione dell'elemento di corrente Id (dipolo elementare).

Dal potenziale vettore si deriva il campo magnetico $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} / \mu$ e da questo il campo elettrico $\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{H} / j\omega\epsilon$. Eseguendo questa sequenza di operazioni, laboriose ma non difficili, si ottengono queste espressioni per le componenti di \vec{E} e di \vec{H} in un generico punto P :

$$R.O.S. = \frac{A_2 + A_1}{|A_2 - A_1|}$$

Come si vede, i due casi estremi, quello di un'onda viaggiante pura e quello di un'onda stazionaria, corrispondono rispettivamente a $R.O.S.$ uguale a uno e $R.O.S.$ uguale a infinito.

²⁸ Si noti che la definizione richiede che la corrente I sia costante su tutto il segmento d . Questo può essere ottenuto ipotizzando, ad esempio, che l'elemento di corrente si richiuda su due cariche $+q$ e $-q$, concentrate alle estremità di d e di intensità tale da soddisfare alla equazione di continuità ($j\omega q = I$), oppure che esso sia un segmento molto corto di un circuito più esteso, nel quale scorra la corrente I .

²⁹ Usando la delta di Dirac $\delta(P)$, la densità di corrente assume l'espressione: $\vec{J} = Id \delta(P) \hat{z}$.

$$E_r = \mu\omega \frac{Id \cos\theta}{2\pi r} \left(\frac{1}{kr} + \frac{1}{jk^2 r^2} \right) e^{-jkr} \quad (77)$$

$$E_\theta = \mu\omega \frac{Id \sin\theta}{4\pi r} \left(j + \frac{1}{kr} + \frac{1}{jk^2 r^2} \right) e^{-jkr} \quad (78)$$

$$H_\phi = jk \frac{Id \sin\theta}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} \quad (79)$$

La prima caratteristica che si nota è che, data la simmetria geometrica ed elettrica del dipolo, i campi non variano con l'angolo ϕ . Inoltre, il vettore \vec{E} giace nel piano definito dal dipolo e dal vettore \vec{r} che unisce il dipolo con P (questo piano è comunemente chiamato *piano di incidenza*), mentre il vettore \vec{H} è perpendicolare a tale piano e ha pertanto solo la componente H_ϕ .

Il campo ha un comportamento diverso a seconda se siamo vicini o lontani dal dipolo. I termini vicino e lontano non hanno valore assoluto. La distanza va confrontata con la lunghezza d'onda λ . Si è vicini se la distanza r è molto minore di λ , lontani se invece è $r \gg \lambda$. Si può anche utilizzare la quantità adimensionale kr : si dice che si è vicini o lontani dal dipolo a seconda se kr è molto minore o molto maggiore di uno.

6.1.1 Campi di prossimità

Se è $kr = 2\pi r/\lambda \ll 1$, le Eq.ni (77) – (79) si semplificano notevolmente. Un criterio molto utilizzato è quello di assumere $r < \lambda/20$ (ma c'è anche chi sceglie $r < \lambda/10$, a seconda dell'errore che si è disposti a tollerare). In sostanza viene chiamata zona di *campo vicino* o *near field* la regione di spazio dove si possono trascurare i termini di ordine *meno elevato* in $1/kr$; di conseguenza l'espressione di \vec{E} ed \vec{H} divengono:

$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon} \left[\frac{2\cos\theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3} \hat{\theta} \right] \quad (80)$$

$$\vec{H} = \frac{Id}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi} \quad (81)$$

dove, nello scrivere \vec{E} si è sostituito, $I = j\omega q$ (Eq.ne di continuità). Si vede subito che queste espressioni coincidono con quelle quasi-statiche, che abbiamo presentato nella Sezione 4, quando si è discussa l'approssimazione quasi-statica. In particolare, la (80) è identica alla (41) che esprime il campo del dipolo elettrico, mentre, per quel che riguarda il campo magnetico, è chiaro che la (81) è uguale alla (43) se si nota che $d\vec{l} \times \hat{r} = dl \sin\theta \hat{\phi}$ e che l'elemento di linea su cui scorre la corrente, che qui abbiamo indicato con $Id\hat{z}$, lì era indicato con $d\vec{l}$.

6.1.2 Campo lontano

Per $kr \gg 1$, ovvero, in pratica, per $r > \lambda$, si dice che si è nella regione di *campo lontano* (*far field* in inglese) o nel *campo di radiazione*. In questo caso si trascurano nelle Eq.ni (77) – (79) i termini di ordine più elevato in $1/kr$ e si ottengono le seguenti Eq.ni semplificate:

$$\vec{E} = j \frac{Id}{2\lambda} \eta \frac{\sin \theta}{r} e^{-jkr} \hat{\theta} \quad (82)$$

$$\vec{H} = j \frac{Id}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{-jkr} \hat{\phi} \quad (83)$$

Si possono notare queste proprietà.

- 1) Le superfici equifase sono sfere centrate sul dipolo. Il campo a distanza del dipolo ha quindi la struttura di un'onda sferica. Le superfici a fase (superfici d'onda) costante sono sfere centrate sul punto in cui è localizzato il dipolo. L'ampiezza dei campi decresce con r come $1/r$. A pari r essa è massima sul piano equatoriale ($\theta = 90^\circ$) ed è nulla sull'asse del dipolo ($\theta = 0^\circ$).
- 2) I vettori \vec{E} (parallelo al versore $\hat{\theta}$) ed \vec{H} (parallelo a $\hat{\phi}$) sono fra loro ortogonali ed ortogonali ad \vec{r} , che punta verso P .
- 3) L'impedenza d'onda $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ è una quantità reale, che nel vuoto vale 377Ω ;
- 4) La densità di potenza (W/m^2) radiata dal dipolo nella direzione di \vec{r} può essere calcolata ricorrendo al vettore di Poynting (vedi (53), § 5.1). Dalle (82) e (83), risulta:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{E} \times \vec{H}^*| = \eta \frac{|I|^2 d^2 \sin^2(\theta)}{8\lambda^2 r^2} \quad (84)$$

dove $|I|^2$ è uguale a $2I_e^2$ o a I_m^2 a seconda se la corrente è espressa in valore efficace o con il suo valor massimo.

Come si vede, la densità di potenza decresce come $1/r^2$, conformemente al fatto che la potenza irradiata, all'allontanarsi dalla sorgente, si distribuisce sulla superficie di una sfera di area sempre più grande, che cresce appunto come $4\pi r^2$.

Può essere interessante calcolare il flusso del vettore di Poynting e integrarlo su una superficie sferica Σ di raggio r centrata sul dipolo. Se utilizziamo per questo i campi nella loro forma completa (77) – (79) (senza approssimazione di campo lontano) si ottiene

$$\frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{n} d\Sigma = \eta |I|^2 \frac{\pi}{3} \frac{d^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{j}{(kr)^3} \right) \quad (85)$$

dove $|I|^2$ ha lo stesso significato che in (84).

La *parte reale* della (85), esprime la *potenza realmente irradiata*. Essa è, come si vede, indipendente dal raggio della sfera su cui si è fatto il calcolo. Si tratta di potenza che abbandona il dipolo e non vi torna più.

La *parte immaginaria* esprime la *potenza reattiva*. Il segno meno sta ad indicare che essa è di *tipo elettrico* (si veda la (54)); risultato plausibile, se si nota che in prossimità del dipolo le componenti del campo elettrico hanno un peso maggiore (vanno come $1/r^3$) rispetto a quelle del campo magnetico (che vanno come $1/r^2$). Si può pensare che questa energia sia immagazzinata nel campo elettrico del condensatore costituito dalla struttura del dipolo, che nella Figura 12 abbiamo schematizzato con le

due sferette su cui si accumula la carica elettrica. Si tratta in sostanza di energia confinata in prossimità del dipolo, che il generatore emette e riassorbe due volte nel periodo di oscillazione, come si è discusso alla fine della Sezione § 4.2.

6.2 Irraggiamento da Antenne

L'antenna è il dispositivo che trasforma la potenza prodotta dal generatore a radiofrequenza in radiazione EM. Il generatore causa la formazione di correnti elettriche sulla struttura dell'antenna e ciascun elemento di corrente opera come un *dipolo elettrico* che irradia un'onda *elementare*. La somma di tutte queste onde elementari, con i fenomeni di *interferenza* che l'accompagnano, forma l'insieme del campo EM radiato dall'antenna. Il problema viene in genere scomposto in due parti: (a) si determinano le correnti e le cariche che il generatore induce sulla struttura dell'antenna; (b) dalla conoscenza di correnti e cariche, si determinano i potenziali \vec{A} e V con Eq.ni come la (29) e (30) e da questi si calcolano i campi EM con le relazioni (31) e (32). Il problema è notevolmente complesso e qui ci limitiamo a riportare alcune definizioni e a descrivere a grandi linee le regioni del campo in prossimità e a distanza dall'antenna.

Per gli impieghi tipici di un'antenna (es. le telecomunicazioni), solo il campo a distanza è di interesse, mentre il campo di prossimità è sostanzialmente un effetto indesiderato. A grande distanza il campo di qualsiasi antenna ha la forma di un'onda sferica TEM, centrata nel punto in cui è piazzata l'antenna. La distribuzione angolare della potenza è determinata dall'interferenza delle onde emesse da ciascun dipolo in cui, come si è detto, può immaginarsi suddivisa la struttura radiante dell'antenna. Per caratterizzare questa distribuzione angolare della potenza irradiata, la grandezza più usata è il *guadagno* $G(\theta, \phi)$. La definizione di G è data dalla seguente relazione:

$$\vec{S}(r, \theta, \phi) = \frac{P_t}{4\pi r^2} G(\theta, \phi) \hat{r} \quad (86)$$

dove

- $\vec{S}(r, \theta, \phi)$ è la densità di potenza a distanza r , nella direzione (θ, ϕ) indicata dal versore \hat{r} .
- P_t è la potenza RF immessa sull'antenna dal generatore;

Si noti che la quantità $P_t/4\pi r^2$, che appare nella (86), rappresenta la densità di potenza che sarebbe generata alla distanza r da una antenna, detta *antenna isotropa*, che irradiasse uniformemente in tutte le direzioni. Il guadagno $G(\theta, \phi)$ di una certa antenna esprime, pertanto, i diversi pesi rispetto all'antenna isotropa, con cui quell'antenna distribuisce la potenza nelle varie direzioni

Le antenne sono utilizzate anche in ricezione. In questa funzione convertono l'energia EM a cui sono esposte in segnali elettrici che vengono poi inviati al sistema di ricezione (radio, TV ecc.). Per caratterizzare l'antenna in termini della potenza ricevuta il parametro utilizzato è l'*area efficace* o *area equivalente* $A_e(\theta, \phi)$, definita da questa relazione:

$$P_r = S \cdot A_e(\theta, \phi) \quad (87)$$

dove S è la densità di potenza che incide sull'antenna dalla direzione (θ, ϕ) e P_r è la *potenza disponibile* sul ricevitore.

Fra area efficace e guadagno di un'antenna esiste questa relazione:

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad (88)$$

6.3 Zone di campo vicino e di campo lontano

Per una qualsiasi antenna, a distanza superiori a circa λ il campo EM ha proprietà radiative, con una importante distinzione (è il caso delle antenne estese, su cui torneremo fra breve) a seconda delle dimensioni dell'antenna rispetto a λ .

Per distanze inferiori, diciamo dell'ordine di $\lambda/10$ o meno, prevalgono campi elettrici e magnetici di *tipo reattivo* con caratteristiche simili a quelle dei campi quasi-statici, che abbiamo descritto nella Sez. 4 e quando abbiamo parlato dei campi di prossimità del dipolo elettrico (§ 6.1.1). La distribuzione dei campi reattivi è abbastanza complicata: le linee di campo elettrico nascono dalle cariche elettriche positive e terminano sulle cariche negative; i campi magnetici si avvolgono in cerchi intorno alle linee di corrente elettrica. In questa regione di spazio, detta dei *campi reattivi*, una grossa frazione dell'energia elettromagnetica, messa in gioco dal generatore, non si irradia via dalla sorgente, ma viene immagazzinata nel campo. Oggetti materiali che si trovano in prossimità della sorgente possono divenire sede di correnti elettriche e assorbire energia accoppiandosi ai campi reattivi mediante il meccanismo dell'*accoppiamento capacitivo* (per quanto riguarda il campo elettrico) o dell'*accoppiamento induttivo* (per quel che riguarda il campo magnetico). Il rapporto fra intensità del campo elettrico e quella del campo magnetico, noto come *impedenza di campo*, varia a seconda del tipo di sorgente e del punto in cui si effettua la misura. In prossimità di strutture soggette a grandi tensioni (ad esempio le armature di un condensatore) questo rapporto può essere anche molto maggiore dell'impedenza dell'onda TEM (377Ω), mentre nei sistemi a struttura chiusa, come bobine e induttori, o in prossimità dei cavi che trasportano le correnti RF, il rapporto può assumere valori molto più bassi.

Nelle distanze intermedie, diciamo fra $\lambda/10$ e λ , l'aspetto reattivo e quello radiativo sono presenti contemporaneamente. Mentre, per distanze maggiori di λ , l'energia EM lascia la sorgente e si allontana definitivamente da questa a velocità $c \cong 3 \cdot 10^8$ m/s.

Per sorgenti estese rispetto alla lunghezza d'onda, ad esempio antenne a microonde (utilizzate nei ponti radio o nei sistemi radar), è utile distinguere una *zona di campo radiativo vicino o di Fresnel* ed una *zona di campo lontano o di Fraunhofer*. La separazione fra queste due zone è comunemente stabilita ad una distanza pari a $2D^2/\lambda$, dove D rappresenta la massima dimensione lineare della sorgente (come, ad esempio, il diametro dell'apertura di un paraboloide, la larghezza o l'altezza della bocca di un'antenna a tromba, l'altezza di un'antenna filiforme). Nella zona di Fresnel si hanno fenomeni di interferenza che possono dar luogo, su distanze molto piccole (anche dell'ordine di $\lambda/4$) a rapide variazioni nell'ampiezza dei campi. In questa zona, pur avendo il campo un carattere sostanzialmente radiativo, esso ha tuttavia una struttura alquanto irregolare e le relazioni fra campo elettrico e campo magnetico, che ovviamente esistono, sono difficile da scrivere con espressioni

analitiche in forma chiusa. È solo per distanze maggiori di $2D^2/\lambda$ che il campo elettromagnetico possiede quelle proprietà di regolarità dell'onda TEM, di cui già abbiamo detto, e che, legando in maniera molto semplice campo elettrico, campo magnetico e densità di potenza ($S = EH/2 = E^2/2\eta = \eta H^2/2$), permettono di determinare da una di queste grandezze tutte le altre.

Nella Figura 13 sono rappresentate in maniera schematica le zone di campo intorno ad un sistema radiante. La zona del campo di radiazione³⁰ comincia, per qualsiasi struttura radiante, a distanze r maggiori di λ . Questa è certamente una proprietà interessante da un punto di vista fisico, ma la distinzione fra *campo vicino* e *campo lontano*, utilizzata nelle procedure di misura dei campi EM, previste ad esempio dalle norme di sorveglianza fisica, nasce da un'esigenza più operativa e, cioè, dal fatto che mentre nella zona di campo lontano è possibile, dalla misura di una sola delle grandezze E , H o S , determinare le altre con le semplici formule già ricordate ($S = EH/2 = E^2/2\eta = \eta H^2/2$), nel campo vicino ciò non è possibile ed è invece necessario effettuare misure separate di E e di H . Il confine fra la zona di campo vicino e quella di campo lontano è, come si è visto, diverso a seconda che si abbia a che fare con *radiatori corti* (quelli cioè per cui si ha $D \ll \lambda$) o con *radiatori estesi* (D dell'ordine di λ o più).

(a) Per i radiatori corti, il confine fra campo vicino e campo lontano è localizzato ad una distanza pari alla lunghezza d'onda λ .

(b) Per i radiatori estesi, la separazione fra campo vicino e campo lontano è data da $2D^2/\lambda$.

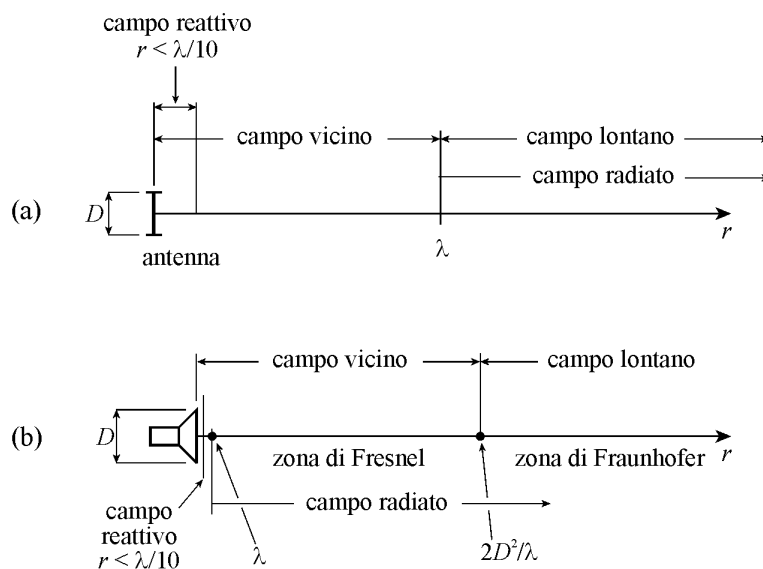


Figura 13 - Rappresentazione schematica delle zone di campo: (a) antenne corte; (b) antenne estese

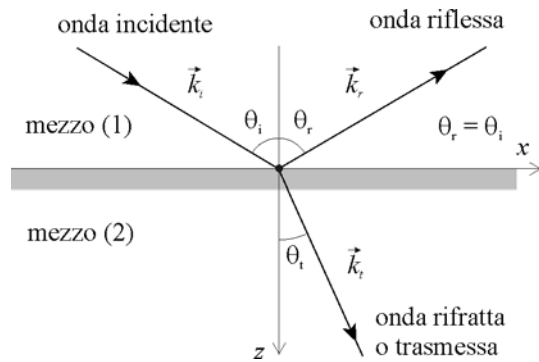
In altre parole e riassumendo, possiamo anche dire che, per un qualsiasi radiatore, il confine fra campo vicino e campo lontano è dato dalla maggiore delle quantità λ e $2D^2/\lambda$.

³⁰ La zona, cioè, in cui l'energia fluisce via senza più tornare alla sorgente che la ha emessa.

7 Riflessione e rifrazione delle onde EM

In tutti i casi di propagazione di cui ci siamo occupati fino ad ora si è supposto che questi abbiano luogo in uno spazio illimitato. Ci sono casi, però, in cui è importante conoscere che cosa accade quando l'onda EM incontra la superficie di separazione Σ fra due mezzi con caratteristiche ε e μ diverse. Considereremo qui il caso, relativamente semplice, di due mezzi separati da una superficie piana, estesa fino all'infinito. Questa geometria apparentemente poco realistica, è di fatto adatta a rappresentare tutte quelle situazioni concrete nelle quali le dimensioni e il raggio di curvatura della superficie di separazione Σ sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda λ .

Si abbiano due materiali di caratteristiche ε_1, μ_1 ed ε_2, μ_2 , che riempiono i due semispazi (1) e (2). Le onde con cui si ha a che fare sono onde piane che rappresentiamo con vettori complessi, la cui dipendenza dalle coordinate spaziali è – come sappiamo – del tipo $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ (§ 5.2.1). Senza perdita di generalità, si può immaginare che la superficie di separazione sia costituita dal piano (x,y) e che il vettore dell'onda incidente \vec{k}_i giaccia nel piano (x,z) (*piano di incidenza*). La soluzione viene cercata nella forma di tre onde piane: *onda incidente* e *onda riflessa* nel mezzo (1) e *onda rifratta* nel mezzo (2).



$$\theta_r = \theta_i \quad (89)$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_i}{k_t} = \frac{n_1}{n_2} \quad (90)$$

Figura 14- Riflessione e rifrazione all'interfaccia fra due dielettrici con caratteristiche (ε_1, μ_1) e (ε_2, μ_2)

Poiché tutte le componenti tangenziali dei vettori del campo devono essere continue in qualsiasi punto dell'interfaccia, questo richiede che anche \vec{k}_r e \vec{k}_i abbiano componenti nulle secondo y (cioè, anche l'onda riflessa e l'onda rifratta devono giacere nel piano di incidenza) e che sia, per ogni x , $x k_i \sin \theta_i = x k_r \sin \theta_r = x k_t \sin \theta_t$ da cui derivano immediatamente le (89) e (90), nelle quali si è posto $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ ed $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$. Se, come accade comunemente per molti materiali è $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, si riconosce subito che n_1 ed n_2 sono gli indici di rifrazione dei mezzi (1) e (2) e le (89) e (90) sono le note *leggi di Snell* per la riflessione e la rifrazione.

Ha interesse conoscere l'intensità dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa in funzione dell'intensità dell'onda incidente. Si definisce *coefficiente di riflessione* Γ il rapporto fra l'ampiezza del campo elettrico dell'onda riflessa E_r e quella del campo incidente, cioè $\Gamma = E_r/E_i$. Analogamente, si definisce *coefficiente di trasmissione* T il rapporto fra l'ampiezza del campo elettrico dell'onda trasmessa E_t e quella del campo incidente, cioè $T = E_t/E_i$. Il problema di calcolare Γ e T si risolve

imponendo la continuità delle componenti di \vec{E} ed \vec{H} all'interfaccia fra i due mezzi e tenendo presente che nel mezzo (1) il campo risulta dalla somma dell'onda incidente e di quella riflessa. La soluzione richiede una certa quantità di calcoli non difficili ma abbastanza laboriosi. Si distinguono due casi: (a) *onde* TE, per le quali il vettore \vec{E} è perpendicolare al piano di incidenza e (b) *onde* TM, nelle quali il vettore \vec{E} giace nel piano di incidenza e \vec{H} ad esso perpendicolare. I risultati sono noti con il nome di *Formule di Fresnel* e sono riassunti nelle equazioni seguenti.

Caso TE (prima coppia di equazioni di Fresnel)

$$\Gamma_{\text{TE}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (91)$$

$$T_{\text{TE}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (92)$$

Caso TM (seconda coppia di equazioni di Fresnel)

$$\Gamma_{\text{TM}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (93)$$

$$T_{\text{TM}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (94)$$

APPENDICE

Riportiamo in questa appendice, senza nessuna pretesa di organicità o completezza, nozioni e formule di matematica utili per la comprensione di quanto esposto nel testo. Si rimanda al già citato¹ testo di Toraldo e Brusaglioni per una trattazione più approfondita ed esaustiva.

A1 Vettori e scalari

In elettromagnetismo, come in altri settori della fisica, si ha che fare con quantità scalari e quantità vettoriali. Una grandezza *scalare* è definita dalla sola intensità. Sono grandezze scalari la massa, la pressione, la temperatura, il volume, la carica elettrica, ecc. Le operazioni sugli scalari sono quelle dell'algebra elementare (somma, sottrazione, prodotto ecc.). Un *vettore* è una quantità caratterizzata da una *intensità* o *modulo*, una *direzione* e un *verso*. Sono grandezze vettoriali, la velocità, la forza, l'accelerazione ecc. L'uso dei vettori permette una grande compattezza nella scrittura delle leggi fisiche.

Un concetto che riveste grande importanza per la fisica è quello di *campo*. Esso permette di formulare le leggi fisiche attribuendo proprietà matematico-geometriche allo spazio (e al tempo). Ad ogni punto P di una regione di spazio R viene fatta corrispondere una certa grandezza di interesse fisico come temperatura, pressione, accelerazione, forza ecc. Se si tratta di una grandezza scalare $\rho(P)$, allora si dice che in quella regione di spazio è definito un *campo scalare* ρ . Se si ha a che fare con una grandezza vettoriale $\vec{V}(P)$, si dice che in quella regione esiste un *campo vettoriale* \vec{V} ³¹. La potenza del concetto di campo sta nel fatto che esso rende possibile scrivere le leggi fisiche in forme che sono indipendenti dal sistema di riferimento (formulazione *invariante*).

A1.1 Algebra dei vettori

Un vettore viene rappresentato graficamente da un segmento con freccia: la lunghezza del segmento definisce l'*intensità* o *modulo* del vettore, mentre la freccia ne definisce *direzione* e *verso*. In scrittura si utilizza una lettera in grassetto (**A**) oppure una lettera sottolineata (A) o sormontata da una freccia \vec{A} . Noi useremo quest'ultima convenzione.

Il prodotto di uno scalare (reale o complesso) q per un vettore \vec{b} è un vettore $\vec{c} = q\vec{b}$ di modulo pari al prodotto dello scalare q per il modulo di \vec{b} ($c = q \cdot b$) di direzione parallela a quella di \vec{b} e direzione uguale o opposta a seconda se q sia positivo o negativo.

Un vettore di modulo unitario è detto *versore*. Noi lo indicheremo con una lettera minuscola sormontata da un accento circonflesso. Esso identifica sostanzialmente una direzione. Ad esempio,

³¹ Esistono grandezze fisiche che richiedono il ricorso a entità matematiche più complesse. Ad esempio, per descrivere le proprietà elastiche dei corpi materiali si utilizzano i *tensori*. Questi possono essere definiti tramite una terna di vettori e possono essere considerati una generalizzazione del concetto di vettore. Se associati ai punti di una regione di spazio i tensori danno luogo ad una struttura detta *campo tensoriale*. I tensori possono essere utilizzati per formulare le leggi dell'elettromagnetismo nello spazio-tempo quadridimensionale (P,t) . Utilizzando il *tensore elettromagnetico* si ottiene una scrittura delle equazioni di Maxwell in una forma estremamente compatta, che permette di dimostrare l'invarianza di queste equazioni in tutti i sistemi di riferimento inerziali (cioè, dotati di moto relativo non accelerato). Non possiamo dilungarci su questo argomento e rimandiamo gli interessati al Cap. V del libro citato¹

dato un vettore \vec{V} , il rapporto $\hat{v} = \vec{V}/V$ è un versore che specifica la direzione di \vec{V} ; inoltre quest'ultimo può scriversi $\vec{V} = V\hat{v}$. Un esempio di versori di comune impiego sono i versori degli assi cartesiani $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

A1.1.1 Somma: $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$

La *somma* o *risultante* \vec{S} di due vettori \vec{A} e \vec{B} si ottiene portando l'inizio di \vec{B} sulla fine (punta) di \vec{A} e congiungendo l'inizio di \vec{A} con la fine di \vec{B} (Figura A 1). Possiamo dare anche quest'altra interpretazione: come si vede dalla figura, la costruzione geometrica ora descritta definisce un parallelogramma in cui la somma \vec{S} costituisce la diagonale che congiunge l'inizio di \vec{A} con la fine di \vec{B} (*regola del parallelogramma*).

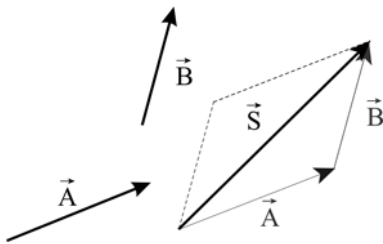


Figura A 1 - Somma \vec{S} di due vettori \vec{A} e \vec{B}

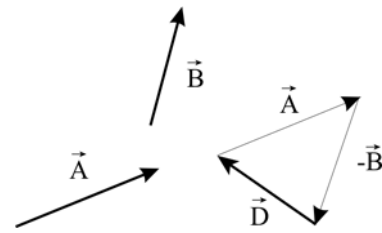


Figura A 2 - Differenza \vec{D} di due vettori \vec{A} e \vec{B}

È chiaro dalla definizione e dalla Figura A 1 che la somma non cambia se si inverte \vec{A} con \vec{B} (*proprietà commutativa della somma*). Si può dunque scrivere:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (\text{A } 1)$$

A1.1.2 Differenza: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$

La definizione della differenza di due vettori deriva immediatamente da quella della somma. Dati due vettori \vec{A} e \vec{B} , la loro differenza si ottiene *sommando ad \vec{A} il vettore $-\vec{B}$* (Figura A 2).

A1.1.3 Proprietà della somma, della differenza di vettori e del prodotto per uno scalare

Da quanto detto è facile mostrare che se \vec{A} , \vec{B} e \vec{C} sono vettori e v e w sono scalari esistono queste relazioni.

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ Proprietà commutativa della somma di vettori
2. $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ Proprietà associativa della somma di vettori
3. $w\vec{A} = \vec{A}w$ Proprietà commutativa del prodotto di uno scalare per un vettore
4. $(v + w)\vec{A} = v\vec{A} + w\vec{A}$ Proprietà distributiva della somma di scalari e prodotto con vettori
5. $w(\vec{A} + \vec{B}) = w\vec{A} + w\vec{B}$ Proprietà distributiva del prodotto di uno scalare per la somma di vettori

È interessante notare che le suddette operazioni fra scalari e vettori seguono le stesse regole delle analoghe operazioni fra numeri reali (o complessi). Ne consegue che le equazioni vettoriali che coinvolgono queste operazioni possono essere manipolate con le stesse procedure che si utilizzano

nell'algebra usuale. Vedremo che per il prodotto (scalare e vettoriale) fra vettori questo parallelismo non sussiste più

A1.1.4 Sistemi di riferimento

Abbiamo visto che l'uso di scalari e vettori, oltre a permettere una scrittura compatta delle equazioni, evidenzia importantissime proprietà di invarianza delle leggi fisiche. Esistono comunque situazioni in cui risulta utile e talvolta indispensabile esprimere le grandezze vettoriali in uno specifico

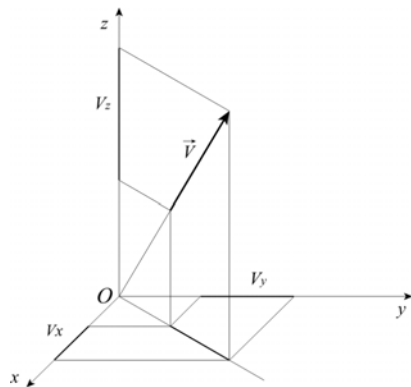


Figura A 3 - Rappresentazione del vettore \vec{V} nel sistema di coordinate cartesiane (x,y,z)

sistema di riferimento. Tale è ad esempio il caso in cui, per verificare una legge o un'ipotesi fisica, si fa ricorso al confronto con risultati sperimentali e gli esperimenti, come è ovvio, debbono essere effettuati in un ben definito sistema di riferimento.

Un *sistema di riferimento* è costituito da una terna di coordinate spaziali più il tempo. Per quanto riguarda le coordinate spaziali se ne hanno di vario tipo (coordinate cartesiane, coordinate cilindriche, coordinate sferiche ecc.¹). In questo testo ci riferiremo solo alle *coordinate ortogonali cartesiane*, le quali, come è noto, sono costituite da tre rette orientate x, y e z , fra loro mutuamente ortogonali, che si incrociano in un punto O , detto *origine* (vedi Figura A 3).

La rappresentazione di un vettore \vec{V} in un sistema di riferimento ortogonale si ottiene come *somma* delle sue *componenti* ($\vec{V}_x = V_x \hat{x}$, ecc.) secondo i tre assi coordinati:

$$\vec{V} = V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z} \quad (\text{A } 2)$$

dove le quantità V_x , V_y e V_z sono le *proiezioni ortogonali* di \vec{V} sugli assi x , y , z . Secondo la (A 2) il vettore \vec{V} è completamente individuato dai tre numeri (V_x, V_y, V_z) , che, una volta stabilito il sistema di riferimento, costituiscono un altro modo per rappresentare il vettore \vec{V} . Si noti che dati due vettori \vec{A} (A_x, A_y, A_z) e \vec{B} (B_x, B_y, B_z), utilizzando le proprietà 4 e 5 del §A1.1.3, la loro somma \vec{C} si può scrivere:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z} \quad (\text{A } 3)$$

cioè, \vec{C} ha componenti (A_x+B_x) , (A_y+B_y) e (A_z+B_z) , ottenute sommando le componenti dei vettori addendi. Si intuisce che la possibilità di operare sulle componenti può facilitare notevolmente la manipolazione delle espressioni vettoriali.

A1.1.5 Prodotto scalare: $p = \vec{A} \cdot \vec{B}$

Il *prodotto scalare* di due vettori \vec{A} e \vec{B} , indicato con $\vec{A} \cdot \vec{B}$, dà come risultato una *quantità scalare* p ottenuta moltiplicando il modulo di \vec{A} per il modulo di \vec{B} e per il coseno dell'angolo θ fra i vettori \vec{A} e \vec{B} .

$$p = \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = AB \cos \theta \quad (\text{A } 4)$$

Interpretazione geometrica del prodotto scalare: p è la proiezione di \vec{B} su \vec{A} moltiplicata per il modulo di \vec{A} , oppure, data la intercambiabilità di \vec{A} con \vec{B} nella definizione (A 4), p è la proiezione di \vec{A} su \vec{B} moltiplicata per il modulo di \vec{B} (Figura A 4).

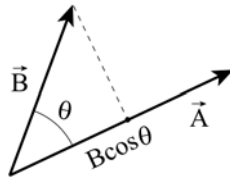


Figura A 4 - Prodotto scalare dei vettori \vec{A} e \vec{B}

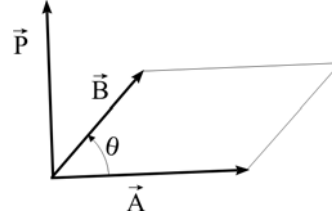


Figura A 5 - Prodotto vettore dei vettori \vec{A} e \vec{B}

Da quanto detto, si possono facilmente dedurre le seguenti *proprietà del prodotto scalare*.

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ | Proprietà commutativa |
| 2. | $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ | Proprietà distributiva |
| 3. | $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \neq \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$ | Il prodotto scalare non gode della proprietà associativa ³² |
| 4. | $w(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (w\vec{A}) \cdot \vec{B}$
$= \vec{A} \cdot (w\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})w$ | Moltiplicazione per uno scalare |
| 5. | $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$
$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$ | Prodotto scalare dei <i>versori</i> degli assi del sistema di riferimento (cartesiano ortogonale) ³³ |

$$\text{Dati: } \vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$$

- | | | |
|----|--|---|
| 6. | $\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$
$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ | Prodotto scalare in termini delle componenti cartesiane |
|----|--|---|

L'ultima delle equazioni al punto 6 permette di scrivere il modulo di un vettore in una forma molto utilizzata in pratica. Per prima cosa, dalla definizione (A 4) si scrive $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ (in questo caso è $\theta = 0$), quindi confrontando con l'espressione di $\vec{A} \cdot \vec{A}$ al precedente punto 6, si ha:

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (\text{A } 5)$$

³² In effetti, il vettore di sinistra è diretto come \vec{C} e quello di destra come \vec{A} .

³³ Come è noto, in algebra, una terna di vettori che gode di queste proprietà costituisce una base di riferimento *ortonormale*.

A1.1.6 Prodotto vettore: $\vec{P} = \vec{A} \times \vec{B}$

Il *prodotto vettore* di due vettori \vec{A} e \vec{B} , indicato con $\vec{A} \times \vec{B}$, è un *vettore* \vec{P} (Figura A 5) il cui modulo vale $AB \sin \theta$ ed è orientato in direzione perpendicolare al piano individuato da \vec{A} e \vec{B} con verso tale che \vec{A} , \vec{B} e \vec{P} sono una terna destrorsa, cioè dalla punta di \vec{P} si vede \vec{A} sovrapporsi a \vec{B} ruotando in senso antiorario di un angolo θ (con la scelta $\theta < \pi$).

Interpretazione geometrica del prodotto vettore: il modulo di \vec{P} è pari all'area del parallelogramma formato dai vettori \vec{A} e \vec{B} , mentre per direzione e verso vale quanto detto nel precedente capoverso.

Proprietà del prodotto vettore.

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ Il prodotto vettore **non** gode della proprietà commutativa
2. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ Proprietà distributiva
3. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ Il prodotto vettore **non** gode della proprietà associativa
 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$
 $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A}$
4. $w(\vec{A} \times \vec{B}) = (w\vec{A}) \times \vec{B}$ Moltiplicazione per uno scalare w
 $= \vec{A} \times (w\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})w$
5. $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$ Prodotto vettore dei *versori* degli assi del sistema di riferimento (cartesiano ortogonale)³⁴
 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$
 Dati: $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ e $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$
6. $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ Prodotto vettore in termini delle componenti cartesiane
 $= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} +$
 $(A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} +$
 $(A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$
7. Se $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ e se \vec{A} e \vec{B} sono diversi da zero, allora \vec{A} e \vec{B} sono *paralleli*

A1.2 Operazioni differenziali e integrali in un campo vettoriale

Ricordiamo, qui di seguito, le definizioni degli operatori vettoriali (gradiente, divergenza e rotore) e l'enunciato di alcune proprietà e teoremi relativi a queste quantità. Per le dimostrazioni dei teoremi e approfondimenti si veda il libro indicato nella nota¹.

³⁴ Come è noto, in algebra, una terna di vettori che gode di queste proprietà costituisce una base di riferimento *ortonormale*.

A1.2.1 Gradiente

Si consideri una funzione scalare $V(P)$, funzione del punto P . L'andamento di V nello spazio può essere descritto mediante una famiglia di superfici "iso- V " (dette *superfici di livello*), ciascuna delle quali è il luogo dei punti in cui $V(P)$ assume un particolare valore V_i . Prese da tale famiglia due curve V_a e $V_b = V_a + dV$ (tali, cioè, che il parametro V_i che identifica una dall'altra differisce della quantità

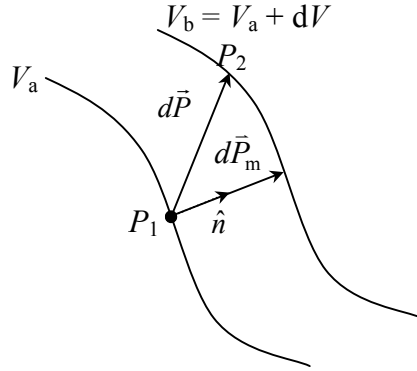


Figura A 6

infinitesima dV), si considerino i due punti P_1 e P_2 , rispettivamente sulla superficie V_a e su V_b . Il modulo dP del vettore $d\vec{P}$ ³⁵ che unisce P_2 a P_1 varia al variare di P_2 su V_b e presenta un minimo dP_m allorché $d\vec{P}$ è allineato con la normale \hat{n} alla superficie V_a . Tenendo presente la relazione $dP_m = dP \hat{n} \cdot \hat{s}$ (dove \hat{s} è il versore di $d\vec{P}$), si può scrivere questa espressione per la *derivata direzionale* di V nella direzione \hat{s} :

$$\frac{dV}{dP} = \frac{dV}{dP_m} \hat{n} \cdot \hat{s} \quad (\text{A } 6)$$

Al vettore $(dV/dP_m)\hat{n}$ che appare in questa formula si dà il nome di *gradiente di V* e lo si indica con il simbolo "grad V "

$$\text{grad}V = \frac{dV}{dP_m} \hat{n} \quad (\text{A } 7)$$

La definizione (A 7) può leggersi così: il gradiente di una funzione scalare $V(P)$ è un *vettore* che ha per *modulo* la derivata direzionale di V nella direzione in cui la derivata è massima (cioè la direzione della normale \hat{n} alla superficie iso- V in P) e per *direzione e verso* il versore \hat{n} .

Sostituendo la definizione (A 7) nella (A 6) si trova immediatamente questa espressione per l'incremento di V quando il punto P si sposta di $d\vec{P} = dP\hat{s}$

³⁵ Scelto un sistema di riferimento, il punto P è individuato dal vettore $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ che va dall'origine O a P . Nel sistema di riferimento cartesiano (x,y,z) , il vettore \vec{r} ha componenti x, y, z (che sono anche le coordinate del punto P) e il vettore spostamento $d\vec{P}$ coincide con $d\vec{r}$, incremento di \vec{r} quando P si sposta in $P + d\vec{P}$. Il vettore infinitesimo $d\vec{P} = d\vec{r}$ ha pertanto componenti dx, dy, dz .

$$dV = \text{grad}V \cdot d\vec{P} \quad (\text{A } 8)$$

D'altra parte sappiamo dal calcolo differenziale che in un sistema cartesiano l'incremento dV si scrive:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (\text{A } 9)$$

Ricordando che dx , dy e dz sono le componenti del vettore $d\vec{P}$ nel sistema di riferimento x,y,z , dal confronto della (A 8) con la (A 9) si ottiene l'espressione di $\text{grad}V$ in coordinate cartesiane:

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{A } 10)$$

Come si vede, in coordinate cartesiane il gradiente di uno scalare $V(P)$ è un vettore le cui componenti sono costituite dalle derivate parziali della funzione V .

A1.2.2 Integrale di linea di un vettore

Sia dato un arco di linea l che unisce due punti P_1 e P_2 in un campo vettoriale \vec{A} . Fissato un verso positivo su l , si definisce *integrale di linea* il seguente integrale curvilineo su l

$$\int_l \vec{A}(P) \cdot d\vec{l} \quad (\text{A } 11)$$

dove $d\vec{l}$ è l'elemento di linea (vettore infinitesimo), diretto come la tangente di l in P .

Se la linea è una curva chiusa C , l'integrale di linea prende il nome specifico di *circuitazione* e si scrive:

$$\oint_C \vec{A}(P) \cdot d\vec{l} \quad (\text{A } 12)$$

A1.2.3 Campi conservativi

In generale, l'integrale (A 11) dipende dal percorso della linea l oltre che, ovviamente, dai punti P_1 e P_2 . Esistono campi per i quali questo non accade (cioè, l'integrale di linea *non* dipende dal percorso di l). In questi casi il campo è detto *conservativo* e si può dimostrare che il vettore \vec{A} è il gradiente di uno scalare U . Per i campi conservativi il risultato dell'integrale di linea si scrive:

$$\int_l \vec{A}(P) \cdot d\vec{l} = U(P_2) - U(P_1) \quad (\text{A } 13)$$

e per la circuitazione si ha ovviamente:

$$\oint_C \vec{A}(P) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{A } 14)$$

Vedremo nel § A1.2.8.1 che, affinché un campo \vec{A} sia conservativo, esso deve soddisfare alla condizione $\text{rot}\vec{A} = 0$ (cioè, \vec{A} deve essere un campo *irrotazionale*).

A1.2.4 Linee di forza o linee di campo

Sia dato un campo vettoriale \vec{A} in una data regione di spazio R . Si definisce *linea di forza* (o anche *linea di campo*) del vettore \vec{A} una linea la cui tangente in ogni punto P è parallela a \vec{A} ³⁶.

A1.2.5 Flusso di un vettore

Si abbia un campo vettoriale \vec{A} in una data regione di spazio R nella quale sia definita una *superficie* a due facce S e sia \hat{n} la normale in P uscente dalla faccia positiva. Si dice *flusso del vettore* \vec{A} attraverso S l'integrale di superficie:

$$\Phi = \iint_S \vec{A}(P) \cdot \hat{n} dS \quad (\text{A } 15)$$

In generale, la superficie S è *aperta* e viene definita faccia positiva quella che un osservatore lascia alla sua sinistra quando percorre, nel verso scelto come positivo, la linea l , bordo di S (*regola del cavatappi*, Figura A 7).

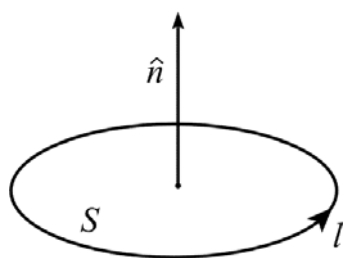


Figura A 7

Se S è una *superficie chiusa*, sia V il volume in essa racchiuso. Scelta come faccia positiva di S quella esterna (cioè, normale \hat{n} uscente da V), la (A 15) fornisce il flusso Φ uscente da S e si può calcolare il rapporto Φ/V . Si contragga ora il volume V fino a dimensioni infinitesime³⁷. A parte casi molto particolari, questo processo al limite

fa convergere il rapporto Φ/V ad un valore definito che prende il nome di *divergenza di* \vec{A} . Pertanto, per la divergenza di \vec{A} , vale questa definizione:

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{1}{V} \iint_S \vec{A}(P) \cdot \hat{n} dS \quad (\text{A } 16)$$

Si può dimostrare che in coordinate cartesiane la divergenza del vettore $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ ha la seguente rappresentazione:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A } 17)$$

Un campo vettoriale la cui divergenza sia nulla è detto *solenoidale*.

A1.2.6 Il laplaciano ∇^2

Se si esegue la divergenza del gradiente di uno scalare V , si ottiene uno scalare a cui si dà il nome di *laplaciano di* V e si indica con il simbolo ∇^2 :

³⁶ La *linea di forza* passante per un punto P_1 può essere costruita nel modo seguente. Partendo da P_1 si traccia un vettore $\Delta \vec{P}_1$, parallelo a $\vec{A}(P_1)$, che ci porta nel vicino punto P_2 ; da qui si traccia un vettore $\Delta \vec{P}_2$, parallelo a $\vec{A}(P_2)$, che ci porta nel punto P_3 ; da P_3 , con uno spostamento $\Delta \vec{P}_3$ parallelo a $\vec{A}(P_3)$, si arriva nel punto P_4 . Il procedimento può essere continuato e porta ad una spezzata che congiunge i punti P_1, P_2, P_3, \dots ; passando al limite per $\Delta \vec{P}$ tendente a zero, la spezzata diviene una curva continua, che costituisce appunto la linea di forza.

³⁷ Da un punto di vista matematico si dice che si fa tendere V al punto P .

$$\nabla^2 V(P) = \text{div}(\text{grad}V(P)) \quad (\text{A } 18)$$

Il laplaciano è un operatore differenziale del secondo ordine rispetto alle coordinate spaziali (contiene una doppia derivazione). Nel sistema di riferimento cartesiano x, y, z , il laplaciano assume la forma:

$$\nabla^2 V(P) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V(x, y, z) \quad (\text{A } 19)$$

A1.2.7 Teorema della divergenza

In un campo vettoriale \vec{A} , sia data una superficie S , che racchiude il volume V . Esiste questa relazione (detta *teorema della divergenza*) fra il flusso di \vec{A} attraverso S la sua divergenza nel volume V :

$$\oiint_S \vec{A}(P) \cdot \hat{n} dS = \int_V \text{div} \vec{A} dV \quad (\text{A } 20)$$

ovvero, il flusso di \vec{A} uscente da S è uguale all'integrale della divergenza di \vec{A} nel volume V .

A1.2.8 Rotore

Si consideri un campo vettoriale \vec{A} nel quale è definita una superficie S , *piana* e di piccole dimensioni. Si prendano la normale \hat{n} e la linea l lungo il perimetro di S orientate secondo la regola del cavatappi (Figura A 7) e si calcoli la circuitazione di \vec{A} lungo l . Si formi il rapporto fra la circuitazione e la superficie S e se ne calcoli il limite al tendere di S a zero; ammetteremo che tale limite abbia un valore definito λ_n . Se facciamo assumere ad \hat{n} tutte le possibili direzioni ne esiste una (\hat{n}_r) in cui λ_n assume un massimo (che indichiamo con λ). Definiamo *rotore di A* ($\text{rot} \vec{A}$) il vettore che ha per modulo λ e per direzione e verso quelli di \hat{n}_r .

Nel sistema di riferimento cartesiano il rotore del vettore $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ si scrive:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A } 21)$$

A1.2.8.1 Campo irrotazionale

Supponiamo che il vettore \vec{A} sia il gradiente di un campo scalare $U(P)$, cioè sia $\vec{A} = \text{grad}U$, la relazione precedente mostra immediatamente³⁸ che in questo caso si ha:

³⁸ Basta esprimere nella (A 21) le componenti di $\vec{A} = \text{grad}U$ come derivate parziali di U , secondo la (A 10): si vede subito che le espressioni in parentesi sono tutte nulle.

$$\text{rot } \vec{A} = 0 \quad (\text{A } 22)$$

e il campo è detto irrotazionale.

Viceversa, se un campo \vec{A} è irrotazionale (cioè se è $\text{rot } \vec{A} = 0$), si può dimostrare che esso può essere espresso come gradiente di un campo scalare $U(P)$. Quindi si può anche dire che un campo irrotazionale è un campo conservativo.

A1.2.9 Teorema della circuitazione o teorema di Stock

Dalla definizione di rotore deriva il seguente importante teorema (*teorema di Stock*, detto anche *teorema della circuitazione*): dato un campo vettoriale \vec{A} , la circuitazione di \vec{A} su una linea l è uguale al flusso del rotore di \vec{A} attraverso ad una superficie S che si appoggia ad l . Ovvero:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{A } 23)$$

dove \hat{n} è la normale alla superficie S ed i versi della normale \hat{n} e della linea l sono scelti con la regola del cavatappi (§A1.2.5).

A1.2.10 Il vettore simbolico nabla

Il vettore simbolico $\vec{\nabla}$, così definito

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A } 24)$$

è detto *del* o *nabla*. Con il suo impiego, il gradiente, la divergenza e il rotore si scrivono:

$$\text{grad } V \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} V \quad (\text{A } 25)$$

$$\text{div } \vec{A} \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (\text{A } 26)$$

$$\text{rot } \vec{A} \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A } 27)$$

Come si può facilmente verificare confrontando queste espressioni rispettivamente con le (A 10), (A 17) e (A 21).

A1.2.11 Identità degli operatori vettoriali

Dati, in una certa regione di spazio R , i campi scalari $v(P)$ e $w(P)$ e i campi vettoriali $\vec{A}(P)$ e $\vec{B}(P)$, si possono scrivere le seguenti identità.

Identità differenziali

$$\vec{\nabla}(v + w) = \vec{\nabla}v + \vec{\nabla}w \quad (\text{A } 28)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \quad (\text{A } 29)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (\text{A } 30)$$

$$\vec{\nabla}(vw) = w\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}w \quad (\text{A } 31)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (v \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} v + v \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (\text{A } 32)$$

$$\vec{\nabla} \times (v \vec{A}) = -\vec{A} \times \vec{\nabla} v + v \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A } 33)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (\text{A } 34)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{A } 35)$$

$$\vec{\nabla} \times (v \vec{\nabla} w) = \vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w \quad (\text{A } 36)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} v = 0 \quad (\text{A } 37)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad (\text{A } 38)$$

Identità integrali

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A}(P) \cdot \hat{n} dS \quad \text{Teorema della divergenza} \quad (\text{A } 39)$$

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \text{Teorema della circuitazione} \quad (\text{A } 40)$$

Note

1. Le identità differenziali si ottengono dalle proprietà del prodotto scalare (§A1.1.5) e del prodotto vettore (§A1.1.6), tenendo presente che $\vec{\nabla}$ è un operatore differenziale e va trattato di conseguenza quando opera su prodotti.
2. Nella (A 35) appare la quantità $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ che non è stata definita prima, per cui la (A 35) andrebbe considerata la definizione $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ piuttosto che un'identità. Come si nota, però, l'equazione è stata subito di seguito riscritta con $\nabla^2 \vec{A}$ (laplaciano di \vec{A}) al posto di $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$. Ed, in effetti, in coordinate cartesiane, grazie al fatto che i versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, non dipendono dal punto P , l'operatore suddetto diventa: $\hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z$. Cioè, in coordinate cartesiane, $\nabla^2 \vec{A}$ è un vettore che ha per componenti il laplaciano delle componenti di \vec{A} . In coordinate curvilinee (anche se ortogonali), il vettore $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ (o, se vogliamo, $\nabla^2 \vec{A}$) è *definito* dalla (A 35): cioè, si ottiene sottraendo $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$ da $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ e il risultato differisce dal vettore che si ottiene semplicemente applicando il laplaciano alle componenti curvilinee di \vec{A} .
3. La (A 38) può essere facilmente verificata se la si scrive per componenti nel sistema x, y e z .

A2 Grandezze complesse

Un numero complesso è definito da una coppia ordinata di numeri reali (x, y) , il primo dei quali è detto la *parte reale* e il secondo *parte immaginaria* di quel numero complesso³⁹. Sui numeri complessi si possono eseguire, una volta definite, tutte le operazioni algebriche (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza, ecc.) ed utilizzare le funzioni (esponenziale, logaritmo,

³⁹ Per indicare un numero complesso, useremo comunemente simbolo letterale in corsivo, senza particolari distinzioni rispetto alle quantità reali. Ad esempio, con z indicheremo un numero complesso che ha parte reale x e parte immaginaria y . Quando sarà necessario evitare ambiguità (se, ad es., dal contesto non si capisce chiaramente che z è complesso) sovrapporremo il segno \sim al simbolo letterale e scriveremo \tilde{z} invece di z .

radice, ecc.) utilizzate con i numeri reali. Queste operazioni sono grandemente facilitate se il numero complesso viene rappresentato da una scrittura di questo tipo:

$$z = x + j y \quad (\text{A } 41)$$

dove j indica il particolare numero complesso $(0, 1)$, detto *unità immaginaria*, contraddistinto dalla proprietà $j^2 = -1$ ($j = \sqrt{-1}$), mentre x ed y sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria di z .

A2.1.1 Complesso coniugato

Due numeri complessi si dicono *coniugati* quando hanno parti reali uguali e parti immaginarie opposte. Dato il numero complesso $z = x + jy$, il suo complesso coniugato, indicato con z^* , ha dunque l'espressione $z^* = x - jy$.

A2.1.2 Operazioni algebriche

Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$, si definiscono le seguenti operazioni.

A2.1.2.1 Somma e differenza

La *somma* $s = z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2)$ e la *differenza* $d = z_1 - z_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2)$ sono date da:

$$\begin{aligned} s &= z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \\ d &= z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (\text{A } 42)$$

cioè, la somma (la differenza) di due numeri complessi è un numero complesso che ha per parte reale la somma (differenza) delle parti reali degli addendi e per parte immaginaria la somma (differenza) delle parti immaginarie.

A2.1.2.2 Prodotto

Il *prodotto* $p = z_1 z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2)$ è dato da:

$$p = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (\text{A } 43)$$

A parole: il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso la cui parte reale è data dalla differenza del prodotto delle parti reali meno il prodotto delle parti immaginarie, e la parte immaginaria è data dalla somma del prodotto della parte reale del primo per la parte immaginaria del secondo più il prodotto della parte reale del secondo per la parte immaginaria del primo.

È interessante notare che, moltiplicando un numero complesso $z = x + jy$ per il suo coniugato $z^* = x - jy$, si ottiene $x^2 + y^2$, cioè un numero reale positivo, la cui radice quadrata costituisce il *modulo* del numero complesso z . Il modulo di z , indicato con la notazione $|z|$, vale dunque:

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A } 44)$$

A2.1.2.3 Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Pertanto, si definisce *quoziente* q dei due numeri complessi $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$ un numero complesso q che moltiplicato per il

divisore z_2 dà come risultato il *dividendo* z_1 . La definizione richiede che il modulo del divisore sia non nullo ($|z_2| \neq 0$). Diamo qui di seguito un'espressione esplicita del quoziente q in funzione della parti reale e immaginaria del dividendo e del divisore⁴⁰:

$$q = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (\text{A } 45)$$

Si noti che il termine al denominatore è il quadrato del modulo del divisore z_2 .

A2.1.3 Rappresentazione nel piano complesso

I numeri complessi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano, anch'essi rappresentabili, come è noto, mediante coppie ordinate di numeri reali. Questa corrispondenza è alla base della rappresentazione geometrica dei numeri complessi mediante vettori disegnati su un piano, chiamato il *piano di Argand* o *piano complesso* (Figura A 8). La lunghezza del vettore corrisponde al *modulo* $|z|$ del numero complesso. Dalla Figura A 8 si vede immediatamente che x e y , rispettivamente parte reale e parte immaginaria di z , possono essere scritti:

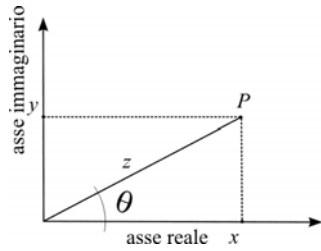


Figura A 8 - rappresentazione nel piano di Argand

$$x = |z| \cos \theta \quad (\text{A } 46)$$

$$y = |z| \sin \theta \quad (\text{A } 47)$$

A2.1.4 Funzioni complesse

Tutte le funzioni di variabili sono definibili anche nel campo complesso. Di particolare interesse per le nostre applicazioni è l'*elevazione a potenza*, per la quale vale la seguente regola, ben nota per le potenze reali:

$$a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1 + b_2} \quad (\text{A } 48)$$

dove a , b_1 e b_2 sono, in generale, numeri complessi.

Nel caso particolare in cui la base sia il numero reale e ($= 2.71828\dots$, base dei logaritmi naturali) e l'esponente sia un numero immaginario puro (ad esempio $j\theta$, con θ numero reale) vale la seguente formula, nota come *formula di Eulero*:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{A } 49)$$

Utilizzando le e insieme alla (A 49) il numero complesso $z = x + jy$ può scriversi:

$$z = |z| e^{j\theta} \quad (\text{A } 50)$$

⁴⁰ La (A 45) si ottiene moltiplicando dividendo e divisore per $x_2 - jy_2$ (complesso coniugato del divisore) e raccogliendo nel risultato i termini della parte reale e di quella immaginaria.

Il numero reale θ è detto la *fase* del numero complesso z , mentre $|z|$, come già detto, ne costituisce il *modulo*.

Come esempio di applicazione della Eq.ne (A 48), si consideri il caso seguente, nel quale α e β sono due numeri reali:

$$e^{j(\alpha+\beta)} = e^{j\alpha} e^{j\beta} \quad (\text{A } 51)$$

Se, utilizzando la formula di Eulero (A 49), si sviluppano gli esponenziali che appaiono in questa espressione, si ritrovano immediatamente le note formule di somma e sottrazione per le funzioni trigonometriche seno e coseno:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \quad (\text{A } 52)$$

A3 Fasori e calcolo simbolico

In moltissimi problemi scientifici e tecnici si ha a che fare con *grandezze oscillanti* che hanno una dipendenza dal tempo di tipo *armonico*⁴¹:

$$a_1(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{oppure} \quad a_2(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{A } 53)$$

dove A_m , ω e φ sono detti, rispettivamente, *ampiezza*, *pulsazione* e *fase* dell'oscillazione⁴².

La soluzione di problemi nei quali intervengano grandezze di tipo armonico è facilitata dalla rappresentazione di queste mediante quantità complesse dette *fasori*.

A3.1.1 Fasori

Sia data una grandezza armonica e sia $a_1(t)$ la sua rappresentazione *istantanea* (si veda la prima delle (A 53)). Utilizzando la fase e l'ampiezza di $a_1(t)$, si costruisca il seguente numero complesso che costituisce il *fasore* ad essa associato:

$$\tilde{A} = A_m e^{j\varphi} \quad (\text{A } 54)$$

che ha la stessa fase e la stessa ampiezza di $a_1(t)$ ⁴³.

⁴¹ L'avere supposto la dipendenza di tipo armonico non costituisce di fatto nessuna perdita di generalità, dato che qualsiasi funzione, periodica o non periodica, può essere rappresentata mediante somme (*serie di Fourier*) o integrali (*integrale di Fourier*) di funzioni armoniche (§ A4).

⁴² Alcune precisazioni. La pulsazione ω è legata al *periodo* T e alla *frequenza* f dalla relazione: $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Sia ω che f si misurano ovviamente in sec^{-1} , ma per la frequenza si ha un'unità di misura specifica che è l'Hz (*hertz*), equivalente ad 1 sec^{-1} . Comunemente, specie se il contesto evita equivoci, si usa il nome di frequenza anche per la ω .

Infine, per quanto riguarda la fase, un uso rigoroso vorrebbe che questo termine fosse riservato all'intero argomento $\omega t + \varphi$ della funzione armonica, mentre φ dovrebbe essere chiamata più propriamente "*fase iniziale*". In pratica, però, questa precisazione è utilizzata soltanto se il contesto lo richiede, mentre il termine fase è comunemente utilizzato per φ .

⁴³ È chiaro che la stessa definizione di fasore si otterrebbe partendo dalla rappresentazione $a_2(t)$ della funzione armonica (la seconda delle (A 53)). Questo richiederebbe di utilizzare nella (A 55) la parte immaginaria del prodotto $A e^{j\omega t}$ invece della parte reale. L'uso consolidato è però quello che fa riferimento alla parte reale.

Dato un fasore, si può quindi ricavare da questo la grandezza istantanea moltiplicandolo per $e^{j\omega t}$ e prendendo la parte reale del prodotto:

$$a_1(t) = \text{Re}[\tilde{A}e^{j\omega t}] = A_m[\cos(\omega t + \varphi)] \quad (\text{A } 55)$$

La tilde (\sim) sopra il simbolo letterale può essere tralasciata (e lo faremo) se dal contesto risulta chiaro che la grandezza in questione è un fasore.

A3.1.2 Calcolo simbolico

L'utilità delle grandezze complesse deriva dal fatto che, con il loro impiego, la soluzione delle equazioni differenziali ed integrali, presenti in numerosi problemi di interesse pratico, risulta enormemente semplificata. Il metodo che ne deriva, detto *calcolo simbolico*, si appoggia sulle considerazioni che qui riassumiamo.

Sia data la seguente equazione nella funzione incognita $y_1(t)$:

$$D[y_1(t)] = A_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{A } 56)$$

dove D è un operatore lineare, indipendente dal tempo e $y_1(t)$ funzione reale. Il fatto che D sia un operatore lineare comporta che, se $p(t)$ e $q(t)$ sono due funzioni di t e se w è una costante (reale o complessa), allora si ha $D[p(t) + w q(t)] = D[p(t)] + wD[q(t)]$.

$$D[p(t) + w q(t)] = D[p(t)] + wD[q(t)] \quad (\text{A } 57)$$

Si associ alla (A 56) l'equazione $D[y_2(t)] = A_m \sin(\omega t + \varphi)$. Se moltiplichiamo quest'ultima per j e la sommiamo membro a membro alla (A 56), utilizzando la linearità dell'operatore D si ha: $D[y_1(t) + jy_2(t)] = A_m[\cos(\omega t + \varphi) + j \cos(\omega t + \varphi)] = A e^{j\omega t}$, ed, infine, definendo:

$$y(t) = y_1(t) + jy_2(t) \quad (\text{A } 58)$$

si arriva alla seguente equazione complessa associata all'equazione di partenza:

$$D[y(t)] = A e^{j\omega t} \quad (\text{A } 59)$$

Da un punto di vista matematico, si tratta di un'equazione integrale o integro-differenziale (a seconda della forma particolare dell'operatore D) lineare nell'incognita $y(t)$, che, poiché il termine forzante ha la forma $A e^{j\omega t}$, può essere cercata della forma

$$y(t) = Y e^{j\omega t} \quad (\text{A } 60)$$

Se utilizziamo la proprietà che la funzione $e^{j\omega t}$ è autofunzione⁴⁴ dell'operatore lineare a coefficienti costanti D ⁴⁵, si può di conseguenza scrivere:

⁴⁴ Si ricorda che una funzione $f(t)$ è *autofunzione* di un operatore G , se essa soddisfa alla relazione $G f(t) = \lambda f(t)$, dove λ (detto *autovalore*) è una quantità costante rispetto a t .

⁴⁵ Non possiamo riportare qui la dimostrazione di questo assunto. Se ne può però intendere la plausibilità pensando, ad esempio, al caso particolare in cui l'operatore D assume la forma della derivazione rispetto a t , che come è noto dà per risultato $j\omega e^{j\omega t}$, nel qual caso, come si vede, $e^{j\omega t}$ è l'autofunzione e $j\omega$ l'autovalore.

$$\mathcal{D}[e^{j\omega t}] = A e^{j\omega t} \quad (\text{A } 61)$$

dove l'*autovalore* A è un numero complesso che non dipende da t , ma che, in generale, dipende da ω , cioè sarà $A = A(\omega)$. Se nel termine di sinistra della (A 59) introduciamo la forma (A 60) della soluzione e teniamo presente la (A 61), possiamo scrivere $\mathcal{D}[y(t)] = \mathcal{D}[Y e^{j\omega t}] = Y \mathcal{D}[e^{j\omega t}] = A(\omega) Y e^{j\omega t}$. Sostituendo nella (A 59) ed eliminando il fattore $e^{j\omega t}$ da ambedue i lati dell'uguale, si ottiene infine l'equazione per il fasore Y

$$A(\omega)Y = A \quad (\text{A } 62)$$

la quale, risolta in Y , dà:

$$Y = H(\omega)A \quad (\text{A } 63)$$

avendo posto $H(\omega) = 1/A(\omega)$. La quantità $H(\omega)$ è nota come *funzione di trasferimento* del sistema fisico di cui l'operatore \mathcal{D} rappresenta il modello matematico.

Alla fine, la funzione istantanea $y_1(t)$ dell'equazione si ricava come parte reale di $y(t) = Y e^{j\omega t}$, ovvero, per la (A 63):

$$y_1(t) = \text{Re}[H(\omega)A e^{j\omega t}] \quad (\text{A } 64)$$

In genere non è necessario rifare ogni volta tutti i passi di questo ragionamento per ottenere la soluzione $y_1(t)$. In pratica, si dispone di una "ricetta" per scrivere la funzione di trasferimento $H(\omega)$ con cui ricavare la soluzione fasoriale Y (A 63). Quindi si moltiplica questa per $e^{j\omega t}$ e si ottiene $y_1(t)$ estraendo la parte reale, come indicato dalla (A 64).

Un esempio tratto dall'analisi dei circuiti elettrici può servire a chiarire la procedura. Per stare nel molto semplice, si consideri un circuito costituito da una resistenza R , un'induttanza L ed una capacità C in serie (circuito RLC serie), alimentato da un generatore di tensione sinusoidale di ampiezza V_m , pulsazione ω e fase φ_0 . L'equazione per la corrente istantanea $i_1(t)$ deriva direttamente dall'applicazione della legge di Ohm al circuito:

$$L \frac{d}{dt} i_1(t) + R i_1(t) + \frac{1}{C} \int^t i_1(t) dt = V_m \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{A } 65)$$

Utilizzando i fasori $V = V_m e^{j\varphi_0}$ e $I = I_m e^{j\varphi}$, rappresentiamo la tensione del generatore e la corrente incognita con le grandezze complesse $v(t) = V e^{j\omega t}$ ed $i(t) = I e^{j\omega t}$ e riscriviamo con queste l'equazione del circuito. Ricordando le note proprietà degli operatori derivata ed integrale

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} e^{j\omega t} &= j\omega e^{j\omega t} \\ \int^t e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A } 66)$$

ed eliminando l'esponenziale $e^{j\omega t}$ che appare in ambedue i membri dell'equazione risultante, si ottiene infine:

$$\left[j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right] I = V \quad (\text{A } 67)$$

che è un'equazione algebrica nell'incognita I . L'espressione fra parentesi quadra è l'autovalore corrispondente all'operatore integro-differenziale $[L(d/dt) + R + (1/C) \int \dots dt]$ che appare nella (A 65).

Invertendo la (A 67) e definendo la quantità $Z(\omega) = [j\omega L + R + (1/j\omega C)]$ (che prende il nome di *impedenza* del circuito), si ricava:

$$I = \frac{1}{Z(\omega)} V \quad (\text{A } 68)$$

Da questa, moltiplicando per $e^{j\omega t}$ e prendendo la parte reale, si ottiene la cercata rappresentazione sinusoidale della soluzione:

$$i_1(t) = \frac{V_m}{|Z(\omega)|} \cos[\omega t + \varphi_0 - \varphi_i(\omega)] \quad (\text{A } 69)$$

dove $\varphi_i(\omega)$ indica la fase dell'impedenza $Z(\omega) = |Z(\omega)| e^{j\varphi_i(\omega)}$.

A3.1.3 Valori medi di prodotti di funzioni armoniche

Si abbiano due grandezze oscillanti $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$ ed $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi_y)$. Il prodotto $p(t) = x(t)y(t)$ è una grandezza istantanea, che, ricordando le formule del prodotto delle funzioni trigonometriche (A 52), può scriversi:

$$p(t) = \frac{X_m Y_m}{2} \cos(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{X_m Y_m}{2} \sin(2\omega t + \varphi_x + \varphi_y) \quad (\text{A } 70)$$

Di questa ha interesse la media temporale P , che, integrando $p(t)$ su un periodo $T=2\pi/\omega$, risulta:

$$P = \frac{X_m Y_m}{2} \cos(\varphi_x - \varphi_y) \quad (\text{A } 71)$$

Ricorrendo alle rappresentazioni fasoriali $X = X_m e^{j\varphi_x}$ ed $Y = Y_m e^{j\varphi_y}$ di $x(t)$ ed $y(t)$ è facile vedere che vale la relazione:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[X Y^*] \quad (\text{A } 72)$$

dove, lo ricordiamo, Y^* rappresenta il complesso coniugato di Y .

Se definiamo la quantità complessa $^c P = X Y^*/2$, possiamo quindi enunciare la semplice regola: *il valor medio del prodotto di due grandezze sinusoidali si ottiene prendendo la parte reale del numero complesso risultante dal prodotto della prima grandezza per il complesso coniugato della seconda diviso due*.

Un caso particolarmente importante di prodotto del tipo suddetto è rappresentato dalla potenza elettrica in un circuito elettrico nel quale scorre la corrente $i(t)$ e ai cui capi è presente la tensione $v(t)$. La *potenza istantanea* è data dal prodotto $v(t)i(t)$ ed il valor medio vale:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V I^*) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad (\text{A } 73)$$

Per non tirarsi dietro nelle formule un fastidioso fattore due, per le grandezze sinusoidali si utilizza molto spesso il *valore efficace*, definito come il *valor massimo diviso la radice di due*. Per esempio, nel caso della tensione, il valore efficace V_e vale $V_m/\sqrt{2}$. Naturalmente, anche i fasori che esprimono la grandezza oscillante possono essere ridotti di un fattore $\sqrt{2}$, con il che si ha $\tilde{V}_e = \tilde{V}/\sqrt{2}$ ⁴⁶. Utilizzando i valori efficaci, la (A 73) si scrive semplicemente:

$$P = \operatorname{Re}(\tilde{V}_e \tilde{I}_e^*) = V_e I_e \cos(\varphi_v - \varphi_i) \quad (\text{A } 74)$$

E' chiaro che, quando abbiamo a che fare con dei dati concreti, bisogna aver sempre ben presente quale è la convenzione adottata. Ad esempio, i 220 volt della tensione con cui viene fornita l'energia elettrica sono volt efficaci, mentre il valore massimo dell'oscillazione sinusoidale corrispondente vale circa 311 volt.

Anche alla parte immaginaria di ${}^c P = X Y^*/2$ – che formalmente si scrive $(V_m I_m/2)\sin(\varphi_v - \varphi_i)$ – si può attribuire un significato fisico, collegandola al valor medio dell'energia immagazzinata negli elementi reattivi del sistema. Si può infatti dimostrare che $X Y^*/2$ può essere esplicitata nella forma:

$${}^c P = R I_m^2 / 2 + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (\text{A } 75)$$

E quindi: (a) la parte reale $R I_m^2 / 2$ rappresenta la *potenza dissipata* negli elementi resistivi, e (b) la parte immaginaria P_i è uguale al doppio della differenza fra l'energia media (la media, fatta su un periodo dell'oscillazione) immagazzinata nei "serbatoi" magnetici (W_m) e quella immagazzinata nei serbatoi elettrici (W_e), moltiplicate per la pulsazione ω . Ad esempio, nel caso del semplice circuito RLC di cui si è detto in precedenza, si può far vedere che è $W_e = I_m^2(L/4)$ e $W_m = I_m^2/(4\omega^2 C)$.

A3.1.4 Vettori complessi

Il metodo di rappresentazione delle grandezze armoniche mediante fasori si estende facilmente dalle grandezze scalari a quelle vettoriali.

Quando si ha a che fare con sistemi in regime sinusoidale, ogni vettore come, ad esempio,

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{x} + A_y(t)\hat{y} + A_z(t)\hat{z} \quad (\text{A } 76)$$

ha componenti rappresentate da quantità reali la cui dipendenza temporale è del tipo:

$$\begin{aligned} A_x(t) &= A_{xm} \cos(\omega t + \varphi_{Ax}) \\ A_y(t) &= A_{ym} \cos(\omega t + \varphi_{Ay}) \\ A_z(t) &= A_{zm} \cos(\omega t + \varphi_{Az}) \end{aligned} \quad (\text{A } 77)$$

dove A_{xm} e φ_{Ax} rappresentano rispettivamente il massimo e la fase della componente dell'oscillazione secondo x . Analoga interpretazione si danno ai simboli con pedici y e z .

⁴⁶ Si ricorda che, quando c'è rischio di ambiguità, abbiamo deciso di scrivere i fasori (e in genere le quantità complesse) con sovrapposta una tilde \sim .

Come si è abbondantemente discusso nelle sezioni precedenti, queste componenti possono essere viste come fasori, la cui rappresentazione *polare* e *cartesiana* si scrive:

$$\begin{aligned} A_x &= A_{xm} e^{j\varphi_{Ax}} = A_{xr} + j A_{xi} \\ A_y &= A_{ym} e^{j\varphi_{Ay}} = A_{yr} + j A_{yi} \\ A_z &= A_{zm} e^{j\varphi_{Az}} = A_{zr} + j A_{zi} \end{aligned} \quad (\text{A } 78)$$

Utilizzando queste definizioni, può dunque definirsi il vettore complesso (una specie di "vettore-fasore"), che ha per componenti i fasori delle componenti⁴⁷:

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (\text{A } 79)$$

Se moltiplichiamo la precedente equazione fasoriale per $e^{j\omega t}$, si ottiene un vettore complesso dipendente dal tempo ${}^c \vec{A}(t) = \vec{A} e^{j\omega t}$. Estraeandone la parte reale si ritrovano le componenti istantanee (A 77).

Una scrittura del vettore-fasore alternativa alla (A 79), si ottiene usando la forma cartesiana delle componenti (l'espressione dopo il secondo uguale nelle (A 78)):

$$\vec{A} = \vec{A}_r + j \vec{A}_i \quad (\text{A } 80)$$

dove \vec{A}_r ed \vec{A}_i sono due vettori **reali**. Questa scrittura permette di evidenziare una proprietà interessante dell'andamento di una grandezza armonica vettoriale al variare del tempo. Per trovare il vettore istantaneo $\vec{A}(t)$ si segue la solita procedura di moltiplicare il vettore complesso (A 80) per l'esponenziale $e^{j\omega t}$ e prendere la parte reale del risultato. Con facili passaggi si ottiene:

$$\vec{A}(t) = \vec{A}_r \cos(\omega t) - \vec{A}_i \sin(\omega t) \quad (\text{A } 81)$$

Da questa espressione risulta evidente che il vettore $\vec{A}(t)$ varia nel tempo mantenendosi sempre nel piano individuato dai due vettori reali \vec{A}_r ed \vec{A}_i , che prende il nome di *piano di polarizzazione*. Si potrebbe far vedere che la curva descritta dall'estremità di $\vec{A}(t)$ è un'ellisse, ma l'argomento è troppo specialistico per queste note.

⁴⁷ Un fasore è un numero complesso che, secondo la convenzione da noi adottata (nota ³⁹), è rappresentato da un simbolo letterale con sovrapposta una tilde (\sim). Adottando la stessa convenzione, un vettore (simbolo con sovrapposta una freccia, es. \vec{A}), quando la chiarezza lo richiede, verrà rappresentato con sovrapposta anche una tilde (es. $\vec{\tilde{A}}$). In pratica, la tilde verrà omessa se la natura fasoriale delle quantità in gioco risulta evidente dal contesto, come, ad esempio, accade nelle Eq.ni dalla (A 76) alla (A 81), nelle quali i termini a destra dell'uguale sono identificabili senza ambiguità come quantità complesse. Inoltre, come altro criterio per distinguere le grandezze istantanee da quelle fasoriali (scalari o vettoriali che siano), si può tenere presente che le grandezze istantanee come le (A 76) e (A 77) mostreranno la dipendenza da t in maniera esplicita e risulteranno così distinguibili dalle corrispondenti grandezze fasoriali (A 79) e (A 78), che sono, ovviamente indipendenti dal tempo.

Sempre riguardo alla scrittura delle grandezze di un campo (scalari o vettoriali che siano), si ricorda che, per quanto esse siano di fatto funzione del punto oltre che del tempo, ovvero sia $V = V(P, t) = V(x, y, z, t)$, l'indicazione della dipendenza spaziale viene in genere omessa, a meno che l'omissione non causi ambiguità. Le quantità $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ denotano i versori unitari degli assi x, y e z .

A4 Analisi di Fourier

Sotto condizioni che sono pressoché sempre rispettate nei problemi fisici, una funzione $f(t)$ della variabile reale t si può sempre rappresentare come sovrapposizione di funzioni seno e coseno, oppure di funzioni esponenziali complesse del tipo $e^{j\omega t}$, dove ω è una variabile reale. Questa tecnica è nota come sviluppo in funzioni armoniche o sviluppo di Fourier. Se la funzione $f(t)$ è periodica lo sviluppo viene fatto *sommando* le funzioni esponenziali e si dice che si fa uno sviluppo in *serie di Fourier* se invece la funzione non è periodica la sovrapposizione si ottiene mediante *integrazione* su ω e lo sviluppo prende il nome di *integrale Fourier*.

A4.1.1 Serie di Fourier

Si abbia una funzione periodica $f(t)$, di periodo T , tale cioè che sia $f(t+T) = f(t)$. Si dimostra⁴⁸ che la funzione può essere sviluppata mediante la seguente somma infinita di funzione esponenziali $e^{jn\omega_0 t}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{A } 82)$$

in cui ω_0 è legata al periodo T e quindi alla frequenza f_0 (detta *frequenza fondamentale*) dalla relazione $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$, mentre i coefficienti F_n sono dati da questi integrali in t sul periodo T :

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\text{A } 83)$$

La serie (A 82) converge alla funzione $f(t)$ in tutti i punti in cui $f(t)$ è continua, mentre converge a $[f(t^-) + f(t^+)]/2$ negli eventuali punti di discontinuità.

F_n è in genere un numero complesso che possiamo scrivere, in ampiezza e fase oppure in parte reale e parte immaginaria.

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = R_n + jX_n \quad (\text{A } 84)$$

Se, come accade nella pressoché totalità dei casi di interesse pratico, $f(t)$ è una funzione *reale*, la (A 83) mostra immediatamente che è

$$F_{-n} = F_n^* \quad (\text{A } 85)$$

cioè, l'elemento corrispondente all'indice $-n$ è uguale al complesso coniugato dell'elemento di indice $+n$, e lo sviluppo (A 82) si può scrivere:

$$f(t) = F_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right) = F_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = \quad (\text{A } 86)$$

⁴⁸ La dimostrazione si basa sulle proprietà di *ortogonalità* della funzione esponenziale $e^{jn\omega_0 t}$ (per la definizione di ω_0 e T , si veda il testo):

$$\int_0^T e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T, & n = m \end{cases}$$

cioè, l'insieme di funzioni $\{e^{jn\omega_0 t}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ costituisce un insieme completo di funzioni ortogonali. L'argomento è però troppo specialistico per essere trattato in questa sede

F_0 è chiaramente il valor medio di $f(t)$. L'oscillazione associata alla *frequenza* $f_1 = f_0$ prende il nome di *componente (o riga) fondamentale dello spettro* di $f(t)$ ed ha ampiezza $2|F_1|$, mentre la *riga o armonica* n-esima ha ampiezza $2|F_n|$.

Lo sviluppo in serie di Fourier può essere esteso anche a *vettori* che abbiano una dipendenza dal tempo di tipo periodico. Che questo sia possibile risulta evidente se si pensa al vettore scomposto nelle sue componenti cartesiane, come mostrato dalla (A 76), e che ciascuna di queste componenti può essere sviluppata in serie di Fourier. In definitiva un vettore $\vec{A}(t)$, periodico in t , si può scrivere:

$$\vec{A}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{A}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{A } 87)$$

Dove \vec{A}_n è il fasore relativo alla armonica n-esima e le cui componenti si ottengono da quelle di $\vec{A}(t)$ con integrazioni come la (A 83).

A4.1.2 Integrale di Fourier

Si abbia una funzione $f(t)$ non periodica⁴⁹ definita per t che va da $+\infty$ a $-\infty$. Essa può essere ottenuta come sovrapposizione di esponenziali ricorrendo ad un *integrale* invece che ad una somma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A } 88)$$

in cui ω è una variabile reale continua e la funzione $F(\omega)$, detta la *trasformata di Fourier*, si ricava dalla $f(t)$ mediante l'integrale:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A } 89)$$

La (A 89) è detta *trasformazione diretta* e la (A 88) *trasformazione inversa*. Una condizione sufficiente perché la trasformata di Fourier esista è che esista e sia finito l'integrale del valore assoluto di $f(t)$, cioè che sia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (\text{A } 90)$$

La trasformata inversa converge alla funzione $f(t)$ in tutti i punti in cui $f(t)$ è continua e ad $[f(t^-) + f(t^+)]/2$ nei punti in cui $f(t)$ ha una discontinuità.

Nel caso di funzioni $f(t)$ *reali* la trasformata di Fourier gode di alcune proprietà simili a quelle viste per la serie di Fourier. In particolare si ha una proprietà analoga alla (A 85):

$$F(-\omega) = F(\omega)^* \quad (\text{A } 91)$$

la quale comporta che la antitrasformata possa scriversi:

⁴⁹ La $f(t)$ può essere anche periodica, però in tal caso la trasformata $F(\omega)$ contiene singolarità, che debbono essere rappresentate con δ di Dirac.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \right) \quad (\text{A } 92)$$

Anche l'integrale di Fourier può essere facilmente esteso a campi vettoriali che dipendono dal tempo in maniera qualsiasi. La procedura è del tutto analoga a quella che abbiamo utilizzato per estendere la serie di Fourier dagli scalari ai vettori. Possiamo quindi dire che un vettore $\vec{A}(t)$, dipendente da t , ha la seguente una rappresentazione in integrale di Fourier:

$$\vec{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A } 93)$$

dove il vettore-fasore $\vec{A}(\omega)$ è relativo alla pulsazione ω .

La (A 86) e la (A 92) mostrano chiaramente come le funzioni reali periodiche e non periodiche possano essere ottenute come sovrapposizione di funzioni armoniche. Inoltre la forma dello sviluppo rappresentata dalla prima espressione dopo il segno dell'uguale nelle (A 86) e (A 92) costituisce il fondamento per l'estensione del calcolo simbolico da problemi che coinvolgono funzioni esponenziali monocromatiche a quelli in cui la dipendenza dal tempo è del tutto generale.